Recknagel, Georg,

Ebene Geometrie Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung für Schulen und zum Selbststudium

München 1896

Ebene

Geometrie.

Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung

für Schulen

und zum Selbststudium

von

Dr. Georg Recknagel,

Professor und Rektor des K. Realgymnasiums zu Augsburg,
koresp. Mitgliede der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München.

Fünfte Auflage.

München.
Theodor Ackermann
Königlicher Hof-Buchhändler.
1896.

Druck von C. Brügel und Sohn in Ansbach.

Vorrede zur vierten Auflage.

In dem vorliegenden Buche ist derjenige Teil des Lehrstoffes, welcher zur systematischen Gestaltung unumgänglich oder von hervorragender Bedeutung für die Anwendung schien, durch größere Schrift hervorgehoben.

In kleinerer Schrift sind zahlreiche Lehrsätze an solchen Stellen eingeschaltet, wo sie als weitere Aussagen über die Eigenschaften der eben in Rede stehenden geometrischen Gebilde interessieren können. Auch sie sind wert, gelesen und gemerkt zu werden, da sie bei Anwendung der Planimetrie gute Dienste leisten. Die Beweise derselben können als Aufgaben zur Einübung des gerade behandelten Lehrstoffes dienen.

In kleinerer Schrift ist auch das Wenige vorgetragen, was aus den Anfangsgründen der neueren Geometrie aufgenommen ist. (Nr. 177—180, 202—206, Anhang IV.) Ebenso die im Anhang III aufgeführten isoperimetrischen Sätze, für welche reifere Schüler großes Interesse zu zeigen pflegen.

Die Konstruktionen (494 systematisch geordnete Aufgaben) sind in den Anhängen I und II behandelt. Es hindert indessen den Lehrer nichts, solche überall da einzuschalten, wo er einen Ruhepunkt in der Entwickelung der Theorie für passend hält.

Es sei mir vergönnt, in diesem Vorwort eine Ansicht über die Lehrmethode der Geometrie auszusprechen.

Die Aufgabe, welche dem Schüler von einer Lehrstunde zur anderen gegeben wird, sollte im allgemeinen zweifach sein: die eine bezieht sich auf Einübung des bereits behandelten, die zweite auf Vorbereitung des neuen Lehrstoffes.

Sobald nur die ersten Schwierigkeiten der Auffassung durch gemeinsame Arbeit überwunden sind, scheidet der Schüler selbst Voraussetzung und Behauptung des ihm vorher bezeichneten im Systeme folgenden Satzes aus, entwirft sich die Figur und versucht Beweis oder Lösung entweder ganz selbständig oder mit

Hilfe der gegebenen Anleitung zu finden. So wird er mit dem Gegenstande vertraut in die Schule kommen und mit höherem Interesse dem Unterrichte folgen, der die Aufgabe hat, das bereits Begonnene in exakter Weise abzuschließen. Diese Art der Behandlung wird im Anschlusse an das vorliegende Lehrbuch passend von Nr. 29 an allmählich eingeleitet werden. Die Vorbereitung kann mündlich oder schriftlich sein. Bei der endgiltigen Behandlung des Stoffes in der Schule wird von sämtlichen Schülern schriftlich mitgearbeitet. Da die Überzeugung von der Richtigkeit jedes folgenden Satzes durch die vorhergehenden Sätze gewonnen wird, so darf die Vorbereitung des neuen Stoffes zugleich auch als Einübung des alten gelten, und man wird sich überzeugen, daß die Geduld und Beharrlichkeit, welche man in den ersten Monaten aufwenden muß, um die Schüler zur Selbstthätigkeit anzuleiten, bald nicht nur für den Lehrer sondern auch für den Schüler zu Zeitgewinn und Erleichterung führt und die Zahl der mathematischen Analphabeten, welche sich noch immer durch unsere Gymnasien schleichen, wesentlich verringert oder ganz beseitigt. Tentare licet.

Schließlich liegt mir noch die angenehme Pflicht ob, derjenigen Freunde des vorliegenden Buches zu gedenken, welche mich bei Verbesserung desselben durch ihren Rat oder durch Beiträge unterstützt haben.

Zwei derselben, Professor Dr. Hugel und Direktor J. Kober sind leider unterdessen aus ihrem Wirkungskreise als hervorragende Lehrer und Erzieher durch den Tod abberufen worden. Herrn Dr. G. Klein, Rektor des K. Realgymnasiums zu München, und Herrn W. Winter, Professor am alten Gymnasium zu Regensburg freue ich mich für ihre Hilfe hiermit meinen wärmsten Dank aussprechen zu können.

Auch darf ich erwähnen, daß Professor W. Winter vor kurzem durch eine im Sinne dieser Planimetrie geschriebene Stereometrie und Trigonometrie (München bei Theodor Ackermann 1890) ein Bedenken beseitigt hat, welches bisher einige Kollegen von der Einführung abgehalten hat.

Augsburg, im Juli 1891.

G. Recknagel.

Vorrede zur fünften Auflage.

In den letzten neun Jahren bot sich mir Gelegenheit, die Wirkung des nach dem vorliegenden Buche erteilten Unterrichts

zu beobachten bei Schülern, welche keinen propädeutischen Unterricht genossen hatten und im Alter von 13—15 Jahren standen. Wenn man anfangs nicht eilt, sondern vier bis fünf Monate mit der Einleitung und den ersten beiden Abschnitten des 1. Teiles zubringt und dabei auch Zirkel, Winkelhaken, Transporteur und Maßstab walten läßt, bewältigt man in den ca. 70 Lehrstunden des Schuljahres leicht die vorgeschriebenen fünf Abschnitte und erzielt den Erfolg, daß schließlich die fleißigen Schüler leichte Beweise (z. B. 61—73) auch ohne besondere Vorbereitung finden.

Von der Einleitung kann man die nun mit Sternchen bezeichneten Nummern 3* 7* 8* vorerst übergehen, um bald zur geraden Linie zu kommen, wird aber später wahrscheinlich Veranlassung haben, auf diese „philosophischen Betrachtungen", wie sie ein Kritiker genannt hat, zurückzukommen.

Ebenso in Nro. 7 die Anmerkung 2* über das Inkommensurable.

Nun noch ein Wort über die Parallelentheorie. Man fand früher in diesem Buche an der Stelle des Euklidischen Grundsatzes den Beweis von Bertrand, der darauf ausgeht, zu zeigen, daß die kleinste Winkelebene noch größer ist als der breiteste Parallelstreifen. Dabei mußte man die Annahme machen, daß zu gleichen Winkeln gleich große Winkelebenen gehören, und hierin liegt der circulus vitiosus. Wenn nämlich zu gleichen Winkeln, abgesehen von ihrer Lage, gleichflächige Winkelebenen gehören sollen, so muß (wie man z. B. an den korrespondierenden Winkeln sieht) die an und für sich unendlich große Fläche des Parallelstreifens im Vergleiche mit dem Winkel gleich Null vorausgesetzt werden, d. h. man muß das, was man beweisen will, sogar in weiterem Umfange voraussetzen.

Es ist somit, so lange man die Anfangsgründe der Geometrie nach Euklid lehrt, ehrlicher, sich auch zu dem Grundsatze des Euklid zu bekennen d. h. die Annahme zu machen, daß es durch einen Punkt außer der vulgären Parallelen keine weitere nicht Schneidende mehr gibt, obwohl dieser Satz aus der Natur der Geraden und der Ebene nicht abgeleitet werden kann, vielmehr ein gewisser Winkelbezirk von möglichen Nichtschneidenden als denkbar zuzulassen ist (Nic. Lobatschewsky, Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallelen).

Wenn es einen solchen Bezirk von endlicher Winkelgröße gibt, dann ist auch in keinem geradlinigen Dreiecke die Summe der Winkel gleich 2 Rechten, sondern kleiner (N. L. S. 18). Umgekehrt: Gäbe es ein geradliniges Dreieck, dessen Winkelsumme genau 2 R ist, so wäre dieses in allen geradlinigen

Dreiecken der Fall, und der obige Winkelbezirk von nicht Schneidenden würde sich auf Null reduzieren.

Die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie sind unabhängig von der Euklidischen Voraussetzung. (N. L. S. 50).

Man kann von einem geradlinigen rechtwinkeligen Dreieck (für dessen spitze Winkel die Euklidische Voraussetzung nicht in Anspruch genommen wird) ausgehend ein sphärisches Dreieck so konstruieren, daß die Seiten und Winkel beider Dreiecke einander gegenseitig bestimmen. Aus diesen Bestimmungsgleichungen lassen sich mit Hilfe der Gleichungen der sphärischen Trigonometrie trigonometrische Gleichungen für das allgemeine (nicht Euklidische) geradlinige Dreieck ableiten (N. L. S. 58).

Diese Gleichungen gehen in die gewöhnlichen (von der Euklidischen Hypothese abhängigen) Gleichungen der ebenen Trigonometrie über, wenn man die Seiten des geradlinigen Dreiecks unendlich abnehmen läßt, und ergeben gleichzeitig 2 Rechte für dessen Winkelsumme.

Somit ist die Winkelsumme des geradlinigen Dreiecks im allgemeinen von der Länge seiner Seiten abhängig.

N. L. schließt seine maßgebenden Ausführungen (S. 60) mit der Bemerkung: „Demnach gibt es kein anderes Mittel, als die astronomischen Beobachtungen zu Hülfe zu nehmen, um über die Genauigkeit zu urteilen, welche den Berechnungen der gewöhnlichen Geometrie zukommen. Diese Genauigkeit erstreckt sich, wie ich in einer meiner Abhandlungen gezeigt habe, sehr weit, so daß z. B. in Dreiecken, deren Seiten für unsere Ausmessungen zugänglich sind, die Summe der drei Winkel noch nicht um den hundertsten Teil einer Sekunde von zwei Rechten verschieden ist."

Auf diesen Stand der Dinge wird man wohl auch den vorgeschrittenen Schüler einmal aufmerksam machen dürfen. Denn es ist wichtig zu erkennen, daß eine Größe (y), welche infolge des stetigen Wachstums einer andern Größe (x) ebenfalls stetig und ohne Aufhören wächst und dabei sicher nicht über die Grenze a hinauskommt; trotz ihrer fortgesetzten Annäherung an a doch recht wohl um eine bestimmte Größe (b) kleiner als a bleiben kann. Auf Grund dieser Erkenntnis werden dann auch die in der Cyklometrie gegebenen Beweise als berechtigt erscheinen.

Augsburg im Februar 1896.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Planimetrie.

Erster Teil.

Kongruenz.

Zweiter Teil.

Der Flächeninhalt der Figuren.

Dritter Teil.

Die Form der Figuren.

Seite

Vierter Teil.

Eingeschriebene und umgeschriebene Polygone. Cyklometrie.

Einleitung.

A. Vorbegriffe.

1.

Erklärung. Die Geometrie ist die Wissenschaft von dem im Raume Ausgedehnten.

2.

Erklärungen. Ein vollständig begrenzter Teil des Raumes heißt Körper. Gegenstand der Geometrie.

Unsere Vorstellung von einem geometrischen Körper unterscheidet sich von der eines physischen Körpers hauptsächlich dadurch, daß wir uns den geometrischen als stetig den Raum erfüllend denken, während wir durch die Erfahrung angewiesen sind, die physischen Körper als Aggregate diskreter, d. h. durch Zwischenräume getrennter Massenteilchen anzusehen. Bei der Vorstellung eines geom. Körpers sehen wir von dem Stoffe, aus welchem er etwa bestehen mag, ab.

Die Grenze des Körpers (gegen einen anderen Körper, oder den übrigen, unbegrenzten Raum) heißt Fläche.

Für die Vorstellung einer Fläche, die nicht Grenze (Oberfläche) eines Körpers wäre, gibt uns die Erfahrung keinen Anhaltspunkt. Doch pflegt man in der Geometrie auch an Flächen zu denken, ohne sich den Körper, den sie begrenzen, zugleich vorzustellen, d. h. man abstrahiert von dem Körper.

Die Grenze zweier Flächen heißt Linie; die Grenze zweier Linien ist ein Punkt.

Es läßt sich der Punkt auch unabhängig von der Linie denken als einzelne Stelle im Raume; die Linie unabhängig von der Fläche als Spur eines bewegten Punktes; die Fläche als Spur einer bewegten Linie; der Körper als Spur einer bewegten Fläche.

Wenn man im Raume drei Hauptrichtungen der Ausdehnung annimmt, von oben nach unten (Höhe), von links nach rechts (Breite oder Länge), von vorne nach hinten (Dicke, Tiefe), so kommt dem Körper Ausdehnung in jeder der drei Richtungen zu, der Fläche nur in zwei (sie ist ohne Dicke), der Linie in einer (Länge), während der Punkt keine Ausdehnung besitzt.

Als allgemeinste Bezeichnung für einen Gegenstand der Geometrie wird im folgenden der Ausdruck „geometrisches Gebilde" gebraucht.

Geometrische Größen, welche Ausdehnung in gleichviel Hauptrichtungen besitzen, heißen gleichartig. Nur gleichartige Größen können miteinander in Bezug auf Größe verglichen werden. Es besteht eine Linie nicht aus Punkten, eine Fläche nicht aus Linien, ein Körper nicht aus Flächen.

3.*

Methode der Geometrie.

Erklärungen. Man kann in der Geometrie einen rein theoretischen von einem angewandten Teile unterscheiden. — Im theoretischen Teile werden die Eigenschaften der geometrischen Gebilde entwickelt, im angewandten wird die gewonnene Erkenntnis benützt, um Aufgaben zu lösen, die entweder Herstellung (Konstruktion) geometrischer Gebilde von verlangten Eigenschaften oder Berechnung unbekannter Größen aus (durch Messung) gegebenen Größen zum Ziele haben.

Die geometrische Wissenschaft verlangt somit zu dem Wissen noch ein Können; eines wird durch das andere gefördert, erweitert und befestigt.

Die Lehren der Geometrie werden in Form einzelner Sätze vorgetragen, von welchen Worterklärungen oder Definitionen die ersten sein und jedesmal da wieder auftreten müssen, wo ein neuer Gegenstand in die Betrachtung eingeführt wird. Einige wenige Sätze, welche mehr als bloße Worterklärungen sind, indem sie den geometrischen Größen gewisse Eigenschaften beilegen, werden als unmittelbar klar und unbestreitbar (in den Grundformen unseres Vorstellungs- und Denkvermögens un-

---

*) Die mit Sternchen bezeichneten Nummern der Einleitung können am Anfange des Unterrichts übergangen werden.

mittelbar begründet) angenommen und heißen Grundsätze oder Axiome. Ueber den Grundsätzen erhebt sich ein System von Lehrsätzen, d. h. Sätzen, in welchen die durch Verbindung der Grundsätze mit den Definitionen erschlossenen Eigenschaften der geometrischen Gebilde vorgetragen sind. Der Lehrsatz ist in der Regel so gefaßt, daß ein Bedingungssatz mit einem Hauptsatze verbunden ist. Jener enthält die Voraussetzung (hypothesis, datum), dieser die Behauptung (thesis). Häufig liegt die Voraussetzung auch in der vorangegangenen Erklärung eines im Lehrsatze gebrauchten Wortes. Beweis.

Die Lehrsätze bedürfen des Beweises, d. h. der Darlegung, inwiefern die aufgestellte Behauptung eine notwendige Folge der bereits anerkannten Grundsätze, Definitionen und der im Vortrage des Lehrsatzes selbst gemachten Voraussetzungen ist. Der Nachweis dieses Zusammenhanges kann entweder unmittelbar oder durch Vermittlung bereits bewiesener Lehrsätze geführt werden.

Man unterscheidet zwei Beweis-Methoden, den direkten und den indirekten Beweis. Der direkte Beweis besteht darin, daß die im Lehrsatze aufgestellte Behauptung als Folgerung aus der Voraussetzung und schon anerkannten Sätzen durch eine stetige Kette von Schlüssen abgeleitet wird. Bei dem indirekten Beweise nimmt man die Unrichtigkeit des zu beweisenden Lehrsatzes an, und zeigt, daß infolge dieser Unrichtigkeit auch ein schon als richtig anerkannter Satz (oder die Voraussetzung des Lehrsatzes selbst) unrichtig sein müßte.

Die Schlußweise (deren wir uns auch außerhalb der Geometrie sehr häufig bedienen) ist bei dem indirekten Beweise folgende: Wäre der aufgestellte Satz falsch, so müßte (aus hier anzuführenden Gründen) auch der Grundsatz .... (bewiesene Lehrsatz ....) falsch sein. Nun ist aber der Grundsatz .... nicht falsch; also kann auch der aufgestellte Satz nicht falsch sein; mithin ist er richtig. Verstößt die Annahme der Unrichtigkeit des aufgestellten Satzes gegen die eigene Voraussetzung desselben, so lautet der Schluß: Ist der aufgestellte Satz falsch, so kann die Voraussetzung nicht erfüllt sein; so oft also die Voraussetzung erfüllt ist, kann der Lehrsatz nicht falsch sein. Somit ist er jedesmal richtig, wenn seine Voraussetzung erfüllt ist; also ist er in der aufgestellten hypothetischen Fassung richtig.

Sinnliche Wahrnehmung oder Erfahrung, z. B. Sehen, kann als geometrischer Beweisgrund nicht verwendet werden, weil die geometrischen Größen als solche nicht Gegenstand sinnlicher Wahrnehmung sind. Vgl. 2.

Hierdurch ist nicht ausgeschlossen, daß eine gute Zeichnung demjenigen, der Lehrsätze oder Beweise sucht, von Nutzen sein kann.

Einigen Sätzen gibt man die Benennung „Zusatz". Man will damit ausdrücken, daß der betreffende Satz durch Inhalt oder Beweis so eng mit dem ihm voranstehenden Lehrsatze verbunden ist, daß er als ein bei Betrachtung oder Begründung des Lehrsatzes sich unmittelbar aufdrängender Gedanke, ein nahe liegender Schluß, als ein besonderer Fall oder als eine Erweiterung des Lehrsatzes betrachtet werden soll.

Über Konstruktionsaufgaben siehe den Anhang zum I. Teil.

4.

Gleich. **Erklärungen.** Gleich heißen zwei geometrische Größen, wenn eine dritte, ihnen gleichartige, in beiden gleich oft enthalten ist. Um anzuzeigen, daß zwei geometrische Größen gleich sind, setzt man zwischen Bezeichnungen, welche für dieselben eingeführt sind, das Zeichen $=$, und nennt diese Darstellung eine Gleichung. Um auszudrücken, daß die geometrische Größe A größer ist als B, schreibt man $A > B$ ($B < A$) und nennt diese Darstellung eine Ungleichung. Gleiche geometrische Größen können verschiedene Form haben. Ähnlich heißen geometrische Größen von gleicher Gestalt (Form)*). Ähnliche geometrische Größen können ungleich sein.

Kongruent. Kongruent heißen zwei geometrische Größen, wenn man sich dieselben so ineinander gelegt denken kann, daß jeder in der einen angenommene Punkt zugleich in der anderen liegt. Um auszudrücken, daß zwei Größen kongruent sind, setzt man zwischen ihre Symbole das Zeichen $\cong$.

Kongruenz ist demnach Übereinstimmung in Größe und Form, also völlige Identität zweier geometrischer Gebilde, abgesehen von ihrer Lage. Kongruente Größen, welche auch in der

*) Dieser Begriff bedarf noch einer näheren Erklärung, kann und wird dieselbe aber erst im 3. Teile finden.

Lage übereinstimmen, können (auch in der Vorstellung) nicht mehr von einander unterschieden werden. Sie müssen deshalb in der Geometrie als ein und dieselbe Größe angesehen werden.

Folgerung. Kongruente Größen können unbedingt, gleiche Größen nur da für einander gesetzt werden, wo es sich um die Größe handelt, also in jeder Gleichung und Ungleichung. Substitution kongruenter und gleicher Größen.

5.

Lehrsatz. Sind zwei Größen, A u. B, einer dritten Größe C gleich, so sind sie auch unter sich gleich, d. h. aus den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} A = C \\ B = C \end{array}\right\} \text{folgt } A = B.$$

Beweis. Da $B = C$, so kann man dem Schlußsatze in 4. gemäß B an die Stelle von C setzen. Thut man dieses in der ersten der beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man $A = B$.

6.

Erklärungen. Addition zweier geometrischer Größen kann in doppeltem Sinne verstanden werden, entweder geometrisch, als Zusammensetzung von zwei geometrischen Größen zu einer solchen Größe, oder arithmetisch als Addition der Zahlen (Maßzahlen), welche ausdrücken, wie oft eine dritte als Einheit angenommene Größe in beiden enthalten ist. Rechnung mit geom. Größen.

Ebenso kann die Multiplikation einer geometrischen Größe mit einer Zahl in doppeltem Sinne aufgefaßt werden.

Die Subtraktion kann man sich als ein Abtrennen eines Teiles vom Ganzen oder als Subtraktion von Maßzahlen denken.

Bei der Division geometrischer Größen sind zwei Fälle denkbar, indem man durch Division entweder die Frage beantwortet, wie oft ist die Größe B in A enthalten (wie viele Teile kann man aus A machen, wenn jeder die Größe von B haben soll?), oder indem man die Größe des n^{ten} Teiles von A ermittelt. In beiden Fällen kann sich die Vorstellung sowohl auf die geometrischen Größen selbst als auf ihre Maßzahlen beziehen.

7.*

Behandlung von Gleichungen zwischen geom. Größen.

Lehrsätze. Wenn man auf beiden Seiten einer zwischen zwei geometrischen Größen bestehenden Gleichung gleiche geometrische Größen addiert oder subtrahiert, so erhält man eine richtige Gleichung.

Ist A = B u. C = D, so gilt

$$A + C = B + D$$

Multipliziert oder dividiert man die beiden Seiten einer zwischen zwei geometrischen Größen bestehenden Gleichung mit der nämlichen Zahl, oder dividiert beide Seiten durch zwei gleiche und den beiden ersten gleichartige geometrische Größen, so entstehen richtige Gleichungen. Ist A = B, die Zahl m = n, ferner C = D, und C u. D mit A u. B gleichartig, so gilt:

$$mA = nB,$$
$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n},$$
$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

Die Begründung dieser Sätze folgt aus der Substitutionsfähigkeit gleicher Größen. (§ 4 Folgerung.)

8.*

Behandlung von Ungleichungen.

Lehrsätze. Nimmt man mit beiden Seiten einer Ungleichung gleiche Veränderungen in dem eben (7) erörterten Sinne vor, so bleibt der Sinn der Ungleichung erhalten.

Subtrahiert man eine Ungleichung von einer Gleichung, so erhält man eine Ungleichung von entgegengesetztem Sinne. Ebenso, wenn eine Gleichung durch eine Ungleichung dividiert wird. Wenn A = B, C < D, so ist

$$A - C > B - D \text{ und}$$
$$\frac{A}{C} > \frac{B}{D}.$$

Addiert oder multipliziert man zwei Ungleichungen von gleichem Sinne, so erhält man eine Ungleichung von demselben Sinne.

Subtrahiert man eine Ungleichung von einer Ungleichung, die den entgegengesetzten Sinn hat, so erhält man eine Ungleichung im Sinne des Minuenden. Analog bei der Division.

Ist $A > B$ u. $C > D$, $m > n$, so ist:

$$A + C > B + D,$$
$$mA > nB,$$
$$A - D > B - C,$$
$$\frac{A}{D} > \frac{B}{C},$$
$$\frac{A}{n} > \frac{B}{m}.$$

Durch jede andere Verbindung von zwei Ungleichungen wird ein unbestimmtes Resultat erhalten.

8a.

Von den allgemeinen Sätzen in 7* und 8* kommen zunächst folgende zur Anwendung:

1. Aus $\left.\begin{matrix} A = B \\ C = D \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} A + C = B + D \\ A - C = B - D \end{matrix}\right.$

d. h. Gleiches zu Gleichem addiert und Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Der Beweis folgt daraus, daß (nach 4.) der Wert der Summe $(A + C)$ und der Differenz $(A - C)$ nicht geändert wird, wenn man B an die Stelle von A, und D an die Stelle von C setzt.

2. Sind die Ganzen gleich, so sind auch ihre Hälften gleich und umgekehrt. (Beweis wie zu 1.)

3. Aus $\left.\begin{matrix} A > B \\ C = D \end{matrix}\right\}$ folgt $\left\{\begin{matrix} A + C > B + D \\ A - C > B - D. \end{matrix}\right.$

Beweis. Nach 1. ist $A \pm C = A \pm D$. Setzt man nun rechts das kleinere B an die Stelle des größeren A, so wird die rechte Seite kleiner als die linke.

9.

Erklärung. Eine geometrische Größe A ist ein Teil der ihr gleichartigen geometrischen Größe B, wenn jeder in A angenommene Punkt zugleich ein Punkt in B ist, dabei aber in B Punkte angenommen werden können, welche dem A nicht angehören. Das Ganze u. seine Teile.

Grundsatz. Das Ganze ist größer als ein Teil desselben. Die Summe der Teile ist dem Ganzen gleich.

B. Die gerade Linie.

10.

Gerade, gebrochen, krumm.

Erklärungen. Der Begriff der geraden Linie muß als elementar, d. h. einer Erklärung durch andere Begriffe weder fähig noch bedürftig, vorausgesetzt werden.

Eine Linie, welche nicht gerade aber aus geraden Linien zusammengesetzt ist, heißt gebrochen. Ist kein Teil einer Linie gerade, so heißt sie krumm (Curve).

11.

Gerade, Strahl, Strecke.

Erklärungen. Die gerade Linie kann in zweifacher Beziehung betrachtet werden: a) bezüglich ihrer Lage, b) bezüglich ihrer Größe (Länge).

Soll eine gerade Linie ohne Endpunkte, also unbegrenzt gedacht, oder von ihrer Begrenzung (Größe) abgesehen werden, so wird sie im folgenden schlechthin Gerade genannt; soll sie von einem Punkte aus ins Unbegrenzte gehend gedacht werden, oder sieht man von einem zweiten Grenzpunkte ab, so nennen wir sie Strahl; denkt man sie von zwei Punkten begrenzt, so heißt sie Strecke.

12.

Grundsatz von der Lage.

Grundsatz. Die **Lage** einer geraden Linie ist durch zwei Punkte bestimmt, durch welche sie gehen soll. Oder: Zwei **Gerade**, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, sind nicht verschieden.

Man bezeichnet eine Gerade durch Aneinanderreihen von zwei Buchstaben (des großen lateinischen Alphabets), die zur Bezeichnung von zwei beliebigen Punkten derselben dienen.

13.

Richtung.

Erklärungen. Unter Richtung von einem Punkte A nach einem Punkte B versteht man den von A über B ins Unendliche gehenden Strahl. Von einem dritten Punkte sagt man: „Er liegt in der Richtung AB,“ wenn er in dem eben definierten Strahle liegt.

Man bezeichnet einen Strahl mit zwei großen Buchstaben, von denen der erste am Ausgangspunkte, der zweite in irgend einem anderen Punkte des Strahles steht.

Die beiden Strahlen, in welche eine Gerade durch einen in ihr angenommenen Punkt geteilt wird, haben entgegengesetzte Richtung.

Zwei Strahlen von entgegengesetzter Richtung kann man Gegenstrahlen nennen.

14.

Erklärung. Erfüllen alle Punkte, welche man in einer Linie (oder Fläche) annehmen mag, eine gewisse Bedingung, so heißt die Linie (oder Fläche) der geometrische Ort jener Punkte. Geometrischer Ort.

Beispiele. Die durch die Punkte A und B gezogene Gerade ist der geometrische Ort aller Punkte, welche mit A und B in gerader Linie liegen. Der von A über B gehende Strahl ist der geometrische Ort aller Punkte, welche in der Richtung von A nach B liegen.

15.

Grundsatz. Die gerade Linie ist die **kürzeste Linie**, welche zwischen zwei Punkten liegen kann. Grundsatz von der Größe.

16.

Lehrsatz. Die Größe einer geraden Linie ist durch ihre Endpunkte bestimmt, d. h. alle geraden Linien, welche die nämlichen Endpunkte haben, sind gleich groß.

Beweis. Wäre eine derselben länger als eine andere, so wäre jene nicht die kürzeste im Widerspruch mit 15.

Zusatz. Zwei Strecken, welche die nämlichen Endpunkte haben, können nicht mehr von einander unterschieden werden (16 u. 12).

Anmerkung. Die zwischen zwei Punkten liegende gerade Linie ist das Maß für die Entfernung der beiden Punkte. Man bezeichnet eine Strecke mit den zwei (großen) Buchstaben, welche an ihren Endpunkten stehen, oder durch einen Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets.

17.

Erklärung. Will man zwei Strecken hinsichtlich ihrer Größe vergleichen, so legt man sie mit den Anfangspunkten auf- Vergleichung von Strecken.

einander und in die nämliche Richtung, dann sind sie gleich, wenn auch die Endpunkte zusammenfallen (16). Außerdem ist diejenige die kleinere, deren Endpunkt zwischen Anfangs- und Endpunkt der andern Strecke fällt (9).

Umgekehrt: Weiß man von der Strecke a, daß sie 1) gleich; 2) größer oder 3) kleiner ist als die Strecke b, und liegen beide Strecken mit den Anfangspunkten auf einander und in der nämlichen Richtung: so schließt man, daß der Endpunkt von a im ersten Falle auf den Endpunkt von b, im zweiten über diesen Endpunkt hinaus in die Verlängerung von b, im dritten Falle aber zwischen Anfangs- und Endpunkt von b fällt.

Zusatz. Gleich große Strecken sind kongruent.

Messen. Anmerkung 1. Eine eingehendere Vergleichung zweier Strecken findet dadurch statt, daß man beide misst, d. h. (durch wiederholtes Auflegen) untersucht, wie oft eine dritte (als Einheit angenommene) Strecke in beiden enthalten ist (aufgetragen werden kann).

Man ist übereingekommen, als Einheit zur Messung von Strecken eine Strecke zu nehmen, welche $^1/_{40000'000}$ des Erdmeridians ist und Meter (mètre, metrum) genannt wird. Das Meter wird zur Vermeidung der Brüche in 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter geteilt (decima, centesima, milesima pars metri). Eine Strecke von 10 Metern heißt Dekameter, 100 Meter geben 1 Hektometer, 1000 Meter ein Kilometer, 10000 Meter ein Myriameter (*δέκα*, *ἑκατόν*, *χίλια*, *μύρια μέτρα*).

Als ältere Längen-Maße sind zu nennen: der Fuß, welcher in 12 Zoll = 144 Linien geteilt ist, und in verschiedenen Ländern verschieden lang angenommen wird. So ist z. B.

der bayerische Fuß = 0,291859 Meter
der preußische Fuß = 0,313853 „
der englische Fuß = 0,304794 „
der pariser Fuß = 0,324839 „ .

Die Rute = 12 Fuß, die Klafter (Lachter beim Bergbau) = 6 Fuß, die Toise (zur Ableitung des Meters verwendet) = 6 pariser Fuß, der Faden (fathom) = 6 englische Fuß, die Elle (yard) sehr verschieden, zwischen $1^1/_2$ und 3 Fuß. Die geographische oder deutsche Meile, definiert als der (360 · 15te) 5400te Teil des Aequators, ist nahezu 7420 Meter lang. Die englische Seemeile = 1855 Meter. Ein Werst = 1066,77 Meter.

Anmerkung 2*. Linien, die ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen kommensurabel, solche, die kein gemeinschaftliches Maß haben, heißen inkommensurabel.

In jedem besonderen Falle wird es vermöge der Beschränktheit unserer Sinne eine Grenze der erkennbaren Unterschiede geben, und insofern läßt sich immer eine ganze Zahl angeben, welche sagt, wie oft eine (kleine) Länge in einer gegebenen Länge enthalten ist. Wird z. B. in einem besonderen Falle 0,1 Millimeter als die kleinste noch unterscheidbare Länge angenommen, so werden die gemessenen Längen als ganzzahlige Vielfache von Decimillimetern ausgedrückt erscheinen, weil etwa vorhandene Unterschiede, die weniger als 0,1 mm betragen, nicht mehr wahrgenommen werden. Das Resultat praktischer Messung wird also stets sein, daß die gemessenen Längen als ganze Vielfache irgend einer (kleinen) Länge ausgedrückt sind, demnach auch als Vielfache von einander ausgedrückt werden können, d. h. ein gemeinschaftliches Maß haben. Theoretisch ist diese Annahme jedoch nicht zulässig, d. h. es darf im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden, daß 2 Strecken ein gemeinschaftliches (wenn auch noch so kleines) Maß haben, und es wird sich in der That häufig genug ergeben, daß das Verhältnis zweier Linien nicht durch eine ganze oder gebrochene endliche Zahl, sondern nur durch einen irrationalen, auf einen unendlichen nicht periodischen Decimalbruch führenden Ausdruck angegeben werden kann. Inkommensurabel.

18.

Erklärungen. Ebene Fläche oder Ebene heißt eine Fläche, welche jede Strecke, die ihre zwei Endpunkte in der Fläche hat, vollständig enthält. Ebene.

Ein vollständig begrenzter Teil der Ebene heißt eine (ebene) Figur. Figur.

Anmerkung. Figur heißt auch jede durch Zeichnung auf einer Fläche versuchte Darstellung eines geometrischen Gebildes. Diese letzteren Figuren sollen nur das Vorstellungsvermögen in der Auffassung der dargestellten Gebilde unterstützen und sind nicht selbst Objekte der Geometrie.

Planimetrie.

Erster Teil.

Kongruenz.

I. Abschnitt.

Gerade in der Ebene.

19.

Erklärung. Die Planimetrie ist jener Teil der Geometrie, welcher sich auf die Betrachtung von Linien und Figuren beschränkt, die in einer Ebene liegen. Werden im folgenden geometrische Größen miteinander in Beziehung gebracht, so wird stets vorausgesetzt, daß sie in einer Ebene liegen.

20.

Erklärung. Zwei in einer Ebene liegende Gerade haben entweder einen Punkt gemeinschaftlich oder keinen (12). Im ersteren Falle sagt man von den Geraden, sie schneiden sich,
Schnittpunkt. und der gemeinschaftliche Punkt heißt ihr Schnittpunkt. Von dem Schnittpunkte zweier Geraden gehen vier Strahlen ins Unendliche.

21.

Winkel. **Erklärungen.** Beschränkt man die Betrachtung auf zwei dieser vier Strahlen, so ist deutlich, daß man den einen derselben um ihren gemeinschaftlichen Ausgangspunkt drehen kann, bis er in die Lage des andern kommt. Die Größe dieser Drehung heißt der Winkel, den die beiden Strahlen miteinander bilden. Der gemeinschaftliche Punkt heißt Scheitel, die Strahlen selbst Schenkel des Winkels. Von der Länge der Schenkel eines Winkels kann demgemäß überhaupt nicht die Rede sein.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch drei Buchstaben, von denen zwei Bezeichnungen beliebiger Punkte der beiden

Schenkel, der mittlere aber der Buchstabe am Scheitel ist, oder durch einen zwischen die Schenkel eingeschriebenen (kleinen griechischen) Buchstaben, oder auch durch den Buchstaben am Scheitel allein, wenn dieser Scheitel nur einem einzigen Winkel angehört. Zuweilen erscheint es passend, der Bezeichnung noch das Zeichen ∡ (Winkel) vorzusetzen.

Zwei Strahlen bilden zwei Winkel mit einander, einen hohlen (konkaven) und einen erhabenen (konvexen), welcher letztere erhalten wird, wenn man den Strahl so dreht, daß er bei der Drehung einmal durch die ihm entgegengesetzte Richtung geht. Den konvexen Winkel kann man mit denselben 3 Buchstaben bezeichnen wie den konkaven, wenn man im ersteren Falle einen Bogen darüber setzt. Z. B. BAC (konkav), $\overset{\frown}{BAC}$ (konvex).

Der zwischen den Schenkeln eines Winkels enthaltene unbegrenzte Ausschnitt der Ebene heißt Winkelebene. Winkelebene.

22.

Erklärungen. Der Erklärung in Nr. 21 gemäß müssen wir Winkel für gleich halten, welche durch gleiche große Drehungen des beweglich gedachten Schenkels um den Scheitel entstehen, und denjenigen Winkel für den größeren, welcher durch eine größere Drehung entsteht. Um hierüber entscheiden und also Winkel ihrer Größe nach miteinander vergleichen zu können, legt man die Winkelebenen so auf einander, daß die Scheitel auf einander und ein Paar Schenkel in die nämliche Richtung fallen. Fallen dann auch die beiden andern Schenkel in die nämliche Richtung, so sind die Winkel gleich; außerdem ist derjenige Winkel der größere, zwischen dessen beide Schenkel der zweite Schenkel des andern Winkels fällt. Vergleichung von Winkeln bez. d. Größe.

Umgekehrt: Weiß man von dem Winkel α daß er 1) gleich, 2) größer oder 3) kleiner ist als der Winkel β, und liegen beide Winkelebenen so auf einander, daß sich die Scheitel und ein paar Schenkel decken, so schließt man, daß der andere Schenkel des Winkels α im ersten Falle in der Richtung des andern Schenkels des Winkels β liegt, während er im zweiten Fall außerhalb, im dritten innerhalb der Winkelebene von β liegt.

Gleiche Winkel sind demnach kongruent.

23.

Maß der Winkel. **Erklärungen.** Das einfachste Maß der Winkel ist nach dem Bisherigen die ganze Umdrehung, welche ein Strahl vollendet hat, wenn er durch stetige in gleichem Sinne ausgeführte Drehung in seine Anfangslage zurückgekehrt ist.

Die halbe Umdrehung hat ein Strahl vollendet, wenn er die seiner ursprünglichen Richtung entgegengesetzte Lage einnimmt. Der durch die halbe Umdrehung gemessene Winkel heißt ein gestreckter Winkel. Die beiden Schenkel des gestreckten Winkels liegen in einer Geraden.

Lehrsatz. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich. 22. 12.

Die Hälfte des gestreckten Winkels (also $\frac{1}{4}$ Umdrehung) heißt ein rechter Winkel (R).

Lehrsatz. Alle rechten Winkel sind einander gleich. 8 a 2.

Der rechte Winkel ist als Maß der Winkel angenommen. Man hat ihn zur Vermeidung der Brüche in kleinere Teile geteilt, so daß der 90te Teil des R ein Grad, der 60te Teil des Grades eine Minute, der 60te Teil der Minute eine Sekunde heißt. $1\ R = 89^0\ 59'\ 60''$.

Senkrecht. Von geraden Linien, die einen rechten Winkel mit einander bilden, sagt man, sie stehen auf einander senkrecht. Der Punkt, in welchem eine Senkrechte die andere trifft, heißt der Fußpunkt der Senkrechten.

Aufgaben: α) Wie viele Sekunden hat ein R?
β) Wie viele Grade, Minuten, Sekunden sind $\frac{1}{2}$ R, $\frac{1}{3}$ R, $\frac{5}{12}$ R, $\frac{3}{16}$ R, $\frac{7}{11}$ R?
γ) Wie viel R sind 60^0, 36^0, $22^0\ 30'$, $2^0\ 15'$, $14^0\ 3'\ 42''$, $88^0\ 7'\ 20''$?

Komplemente Supplemente. Ist ein Winkel kleiner als ein rechter, so heißt er spitz; ist er größer als ein rechter aber kleiner als ein gestreckter, so heißt er stumpf. Zwei Winkel, deren Summe einen rechten beträgt, heißen in bezug auf einander Komplemente oder komplementär. Zwei Winkel, deren Summe 2 R beträgt, heißen in bezug auf einander Supplemente oder supplementär.

Anmerkung. Durch Anwendung von 22 kann man mittelst des Transporteurs Winkel messen und geometrisch addieren. Indem man die Addition der drei Winkel eines Drei-

ecks bei Dreiecken von verschiedener Form und Größe ausführt, induziert man einen Lehrsatz, dessen Beweis später allgemein gegeben wird. Addition der Winkel eines Vierecks, Fünfecks, der Außenwinkel eines Dreiecks, Vierecks, Fünfecks.

24.

Lehrsatz. Winkel, welche gleiche Komplemente oder Supplemente haben, sind gleich. Beweis durch 5 und 8a.

25.

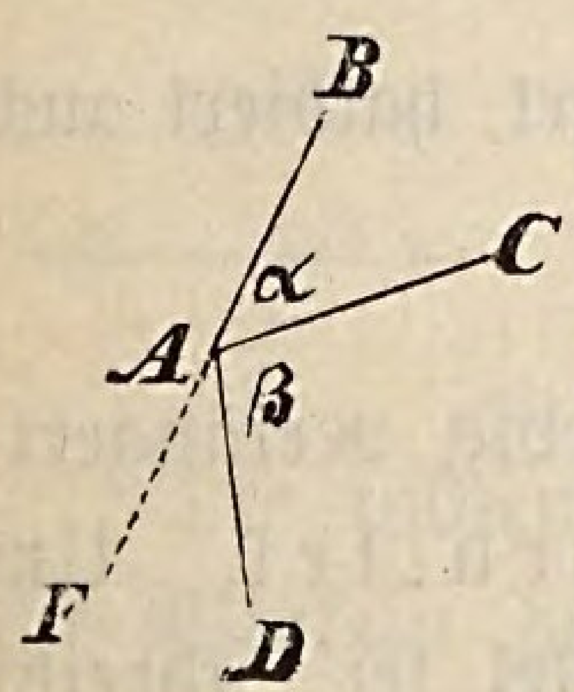
Erklärung. Nebenwinkel heißen zwei Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel haben, und deren nicht gemeinschaftliche Schenkel in gerader Linie liegen. Nebenwinkel.

Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 2 R (9). Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein rechter; sind sie verschieden, so ist der eine spitz, der andere stumpf.

Aufgaben: Die Winkel α u. β sind Nebenwinkel. Wie groß ist α. wenn 1) $\beta = 30^0$ ist, wenn 2) β um 30^0 (n^0) kleiner als ein R ist; wenn 3) $\beta = \frac{7}{6}$ R, 4) $\beta = \frac{m}{p}$ R ist?

26.

Lehrsatz. Besitzen zwei Winkel, welche keinen Teil ihrer Winkelebenen gemeinsam haben, einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel, und beträgt ihre Summe 2 R, so liegen ihre beiden andern Schenkel in einer Geraden.



Beweis. Es seien α und β die genannten beiden Winkel und die Lage des Schenkels AD vorerst unbekannt. Man ziehe AF, den Gegenstrahl von AB. Dadurch erhält man den gestreckten Winkel BAF. Nun ist CAF $= \beta$ (24). Da diese Winkel aber die in (22) vorausgesetzte Lage haben, so erfahren wir, daß AD mit AF zusammenfällt, d. h. daß AF die richtige Lage von AD ist.

Zusatz 1. Die Summe einer beliebigen Anzahl von Winkeln, die denselben Scheitel haben, und von denen keiner mit einem anderen einen Teil der Winkelebene gemein hat, beträgt

2 R, wenn die äußersten Schenkel in einer Geraden liegen, und umgekehrt (9).

Zusatz 2. Bildet von allen in der Ebene möglichen Winkeln, die den nämlichen Punkt zum Scheitel haben, keiner ganz oder teilweise einen Teil des andern, so beträgt ihre Summe 4 R.

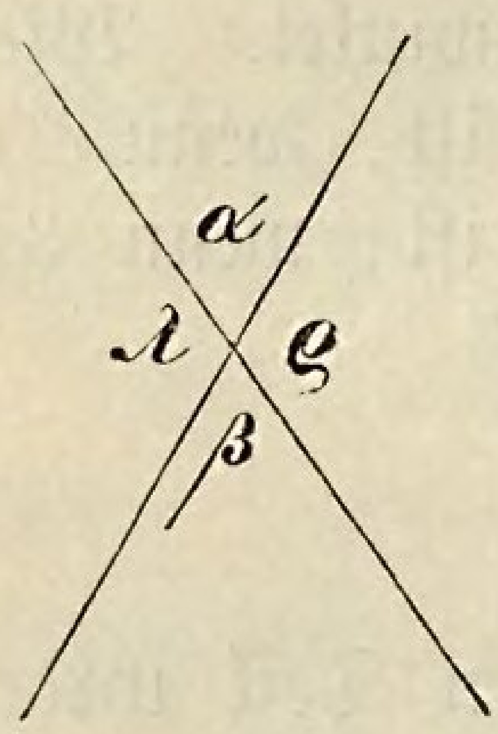
Lehrsätze. α) Die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel stehen auf einander senkrecht.

β) Stehen die Halbierungslinien zweier Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitel und Schenkel, aber keinen Teil gemeinsam haben, auf einander senkrecht, so sind diese beiden Winkel Nebenwinkel.

27.

Scheitelwinkel.

Erklärung. Scheitelwinkel heißen zwei Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben und so liegen, daß die Schenkel des einen Winkels die Gegenstrahlen der Schenkel des anderen Winkels sind.



Lehrsatz. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Beweis. Die Scheitelwinkel α und β haben den nämlichen Nebenwinkel (λ oder ϱ), also gleiche Supplemente, daher ist 24 anwendbar.

Beweise auch $\lambda = \varrho$!

Lehrsätze. 1) Die Gerade, die einen Winkel teilt, teilt auch seinen Scheitelwinkel.

Beweis. Würde ein Strahl, der $\sphericalangle\ \beta$ teilt, den Winkel α nicht teilen, so müßte er λ oder ϱ teilen, und es wäre dann ein Teil von β mit einem Teile von λ (oder ϱ) zusammen 2 R gegen 9.

2) Eine Gerade, welche einen Winkel halbiert, halbiert auch seinen Scheitelwinkel.

28.

Parallel.

Erklärungen. Gerade Linien, die, beliebig verlängert, keinen Punkt gemeinschaftlich haben, heißen parallel. Um auszudrücken, daß die Gerade AB der CD parallel sei, schreibt man AB || CD.

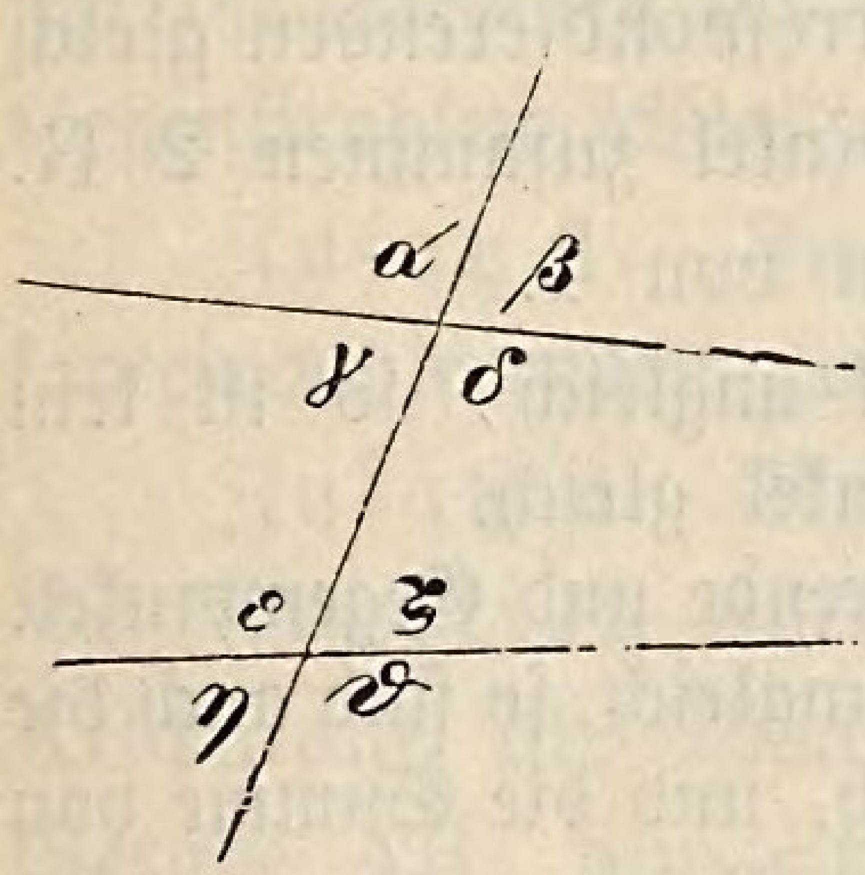
Strecken und Strahlen können möglicherweise keinen Schnittpunkt haben, ohne deshalb parallel zu sein. Sie sind dann nach einer Richtung hin konvergent, nach der entgegengesetzten divergent.

konvergent, divergent.

29.

Wechselwinkel korrespondierende und Gegenwinkel.

Erklärungen. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so bildet die Schneidende mit den geschnittenen Geraden acht Winkel, vier innere und vier äußere. Je zwei dieser Winkel *von verschiedenem Scheitel* haben besondere Benennungen erhalten, es heißen nämlich:



1) *Wechselwinkel* zwei innere oder zwei äußere Winkel, welche auf verschiedenen (*wechselnden*) Seiten der Schneidenden liegen. Somit α zu ϑ, β zu η (äußere Wechselwinkel); γ zu ζ, δ zu ε (innere Wechselwinkel).

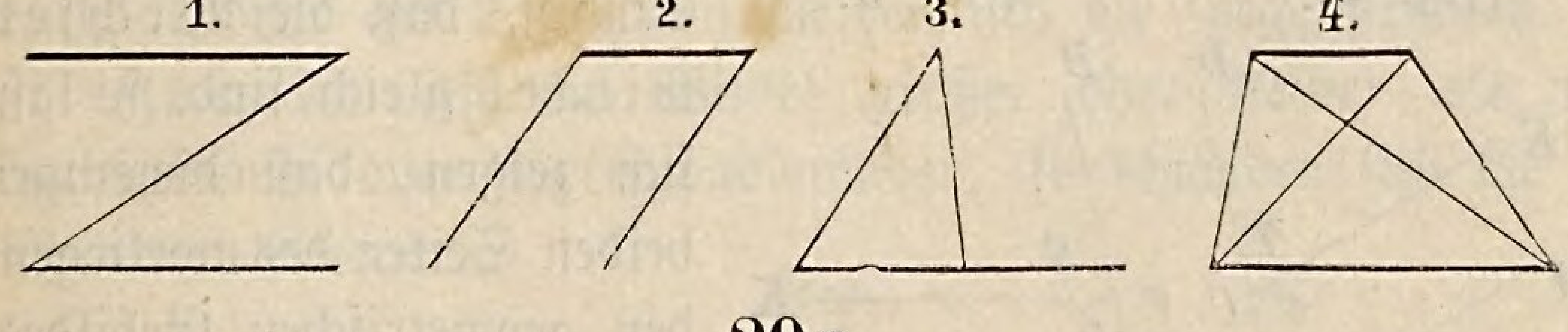
2) *Korrespondierende Winkel* je ein innerer und ein äußerer, die auf derselben Seite der Schneidenden liegen. Somit α zu ε, β zu ζ, γ zu η, δ zu ϑ.

3) *Gegenwinkel* zwei innere oder zwei äußere Winkel, die auf derselben Seite der Schneidenden liegen. Somit α und η, β und ϑ (äußere Gegenwinkel); γ und ε, δ und ζ (innere Gegenwinkel).

Jeder der acht Winkel hat einen Wechselwinkel, einen korrespondierenden und einen Gegenwinkel.

Aufgabe. In welcher Beziehung stehen die hohlen Winkel folgender Figuren zu einander?

1. 2. 3. 4.



29 a.

Die folgenden Sätze enthalten die zwischen den genannten acht Winkeln bestehenden Beziehungen. Die Beweise derselben werden dadurch geführt, daß man die Winkel der Voraussetzung mit den Winkeln der Behauptung durch Anwendung von 25 oder 27 in Gleichung bringt, dann durch 4 oder 5 oder 8 a abschließt.

Lehrsätze. 1) Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel gleich, so ist jeder Winkel seinem Wechselwinkel gleich.

2) Ist ein Winkel seinem korrespondierenden gleich, so ist jeder Winkel seinem korrespondierenden gleich.

3) Ist die Summe zweier Gegenwinkel 2 R, so ist die Summe von jedem Paare Gegenwinkel 2 R.

4) Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel gleich, so ist er auch seinem korrespondierenden gleich und mit seinem Gegenwinkel zusammen 2 R.

5. u. 6) Die beiden Umkehrungen von 4.

7) Sind zwei Wechselwinkel ungleich, so ist kein Winkel seinem Wechselwinkel gleich.

8. u. 9) Analogie für korrespondierende und Gegenwinkel.

10) Sind zwei Wechselwinkel ungleich, so sind auch die korrespondierenden ungleich, und die Summe von jedem Paare Gegenwinkel kleiner oder größer als 2 R.

11 u. 12) Umkehrungen von 10.

Fig. 1.

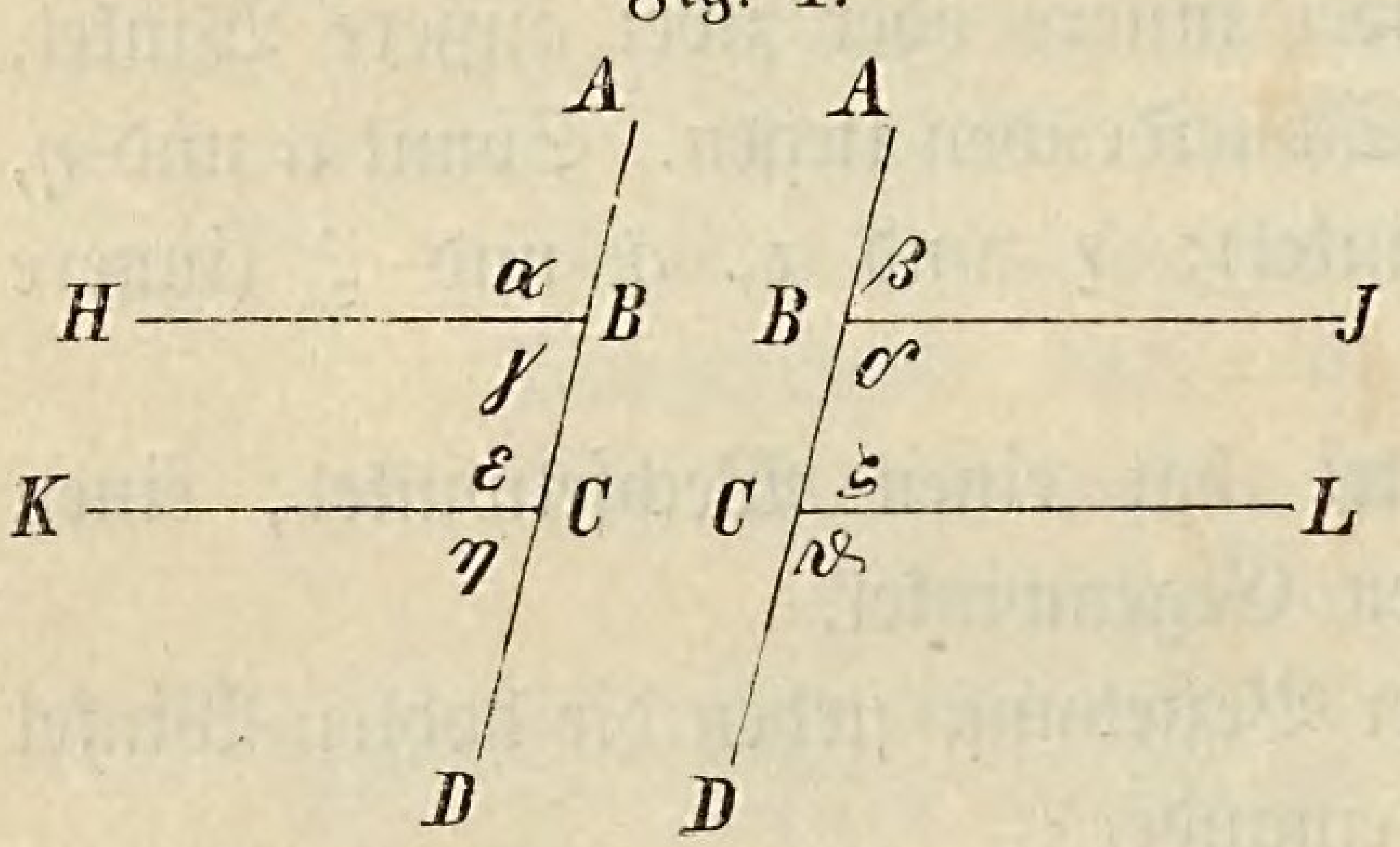


Fig. 2.

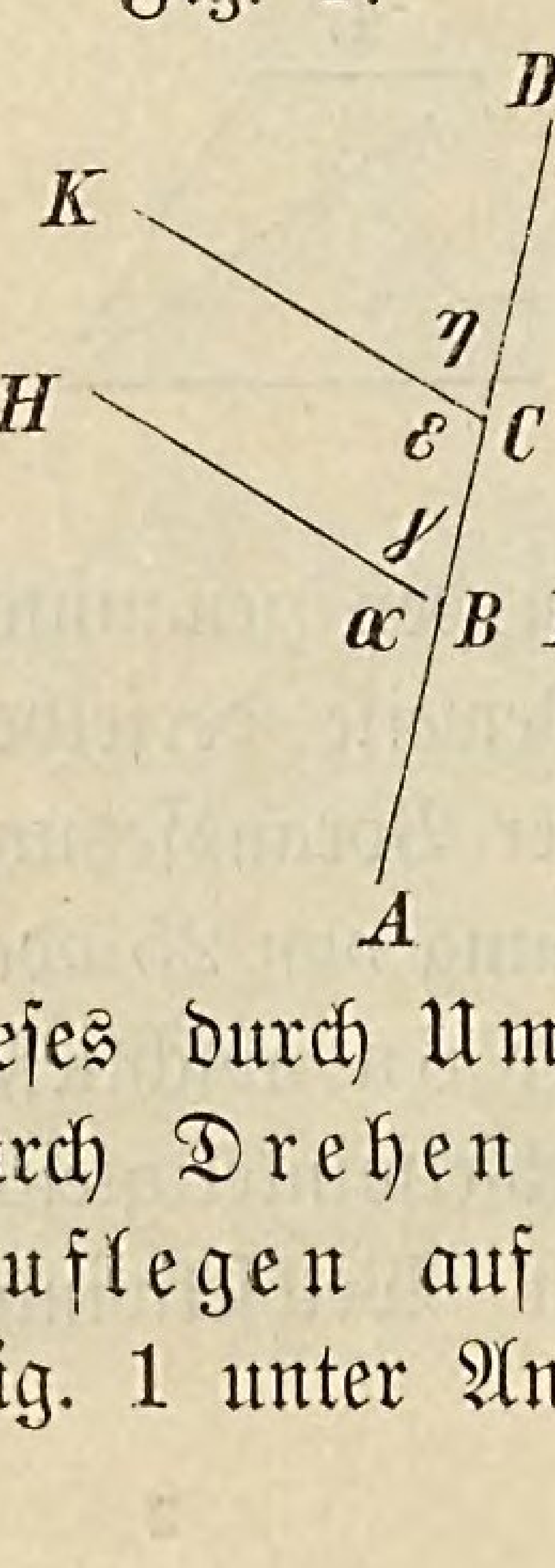
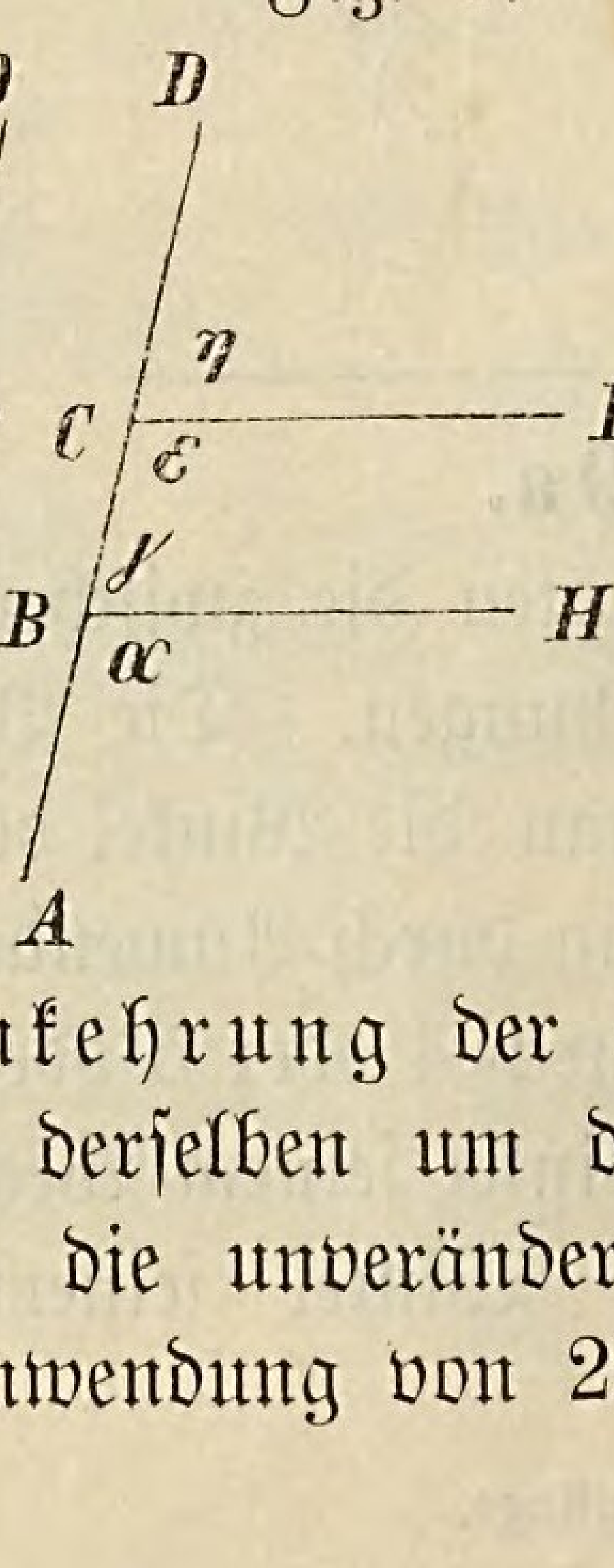


Fig. 3.



Parallelen-Theorie.

30.

Lehrsatz. Ist die Summe von einem Paare Gegenwinkel 2 R, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Beweis. Zieht man aus der Voraussetzung den Schluß, daß die Wechselwinkel gleich sind, so läßt sich zeigen, daß diejenigen beiden Seiten des vorliegenden geometrischen Gebildes, welche durch Trennung desselben längs der Schneidenden (Fig. 1) entstehen, kongruent sind. Es gelingt dieses durch Umkehrung der einen (linken) Seite (Fig. 2), durch Drehen derselben um die Schneidende (Fig. 3) und Auflegen auf die unverändert gebliebene rechte Seite der Fig. 1 unter Anwendung von 22 und 17.

Somit deckt der Strahl CK den Strahl BJ, und zugleich der Strahl BH den Strahl CL, so daß jeder Punkt im Strahle CK zugleich ein Punkt in BJ, und jeder Punkt im Strahle BH zugleich ein Punkt in CL ist.

Würde nun BJ einen Punkt mit CL gemeinsam haben, so würde dieser Punkt zugleich in CK und BH liegen, d. h. würden sich die Strahlen BJ und CL schneiden, so müßten sich auch ihre Gegenstrahlen schneiden, was nach 12. unmöglich ist.

Zusatz 1. Ist ein Winkel seinem Wechselwinkel oder korrespondierenden gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Zusatz 2. Man wendet Zus. 1 an zur mechanischen Konstruktion einer Geraden, die zu einer gegebenen Geraden AB parallel ist: Man legt eine Seite eines Winkelhakens in die Gerade AB, und ein Lineal an eine zweite Seite des Winkelhakens. Dieses Lineal giebt die Schneidende. Indem man nun das Lineal festhält, und den Winkelhaken längst desselben verschiebt, bleiben dessen beide andere Seiten ihrer ursprünglichen Lage parallel.

31.

Grundsatz. Ist die Summe von einem Paare innerer Gegenwinkel kleiner als 2 R, so schneiden sich die geschnittenen Geraden auf derjenigen Seite der Schneidenden, wo dieses Winkelpaar liegt.

Zus. 1. Ist die Summe von einem Paare innerer Gegenwinkel größer als 2 R, so schneiden sich die Gegenstrahlen.

Zus. 2. Ist ein Winkel größer oder kleiner als sein Wechselwinkel oder korrespondierender, so schneiden sich die geschnittenen Geraden.

32.

Lehrsatz. Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so ist die Summe von einem Paare innerer Gegenwinkel 2 R.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 31.

Zusatz. Sind zwei Gerade parallel, so sind die von ihnen mit einer dritten Geraden gebildeten Winkel ihren Wechselwinkeln und korrespondierenden gleich.

33.

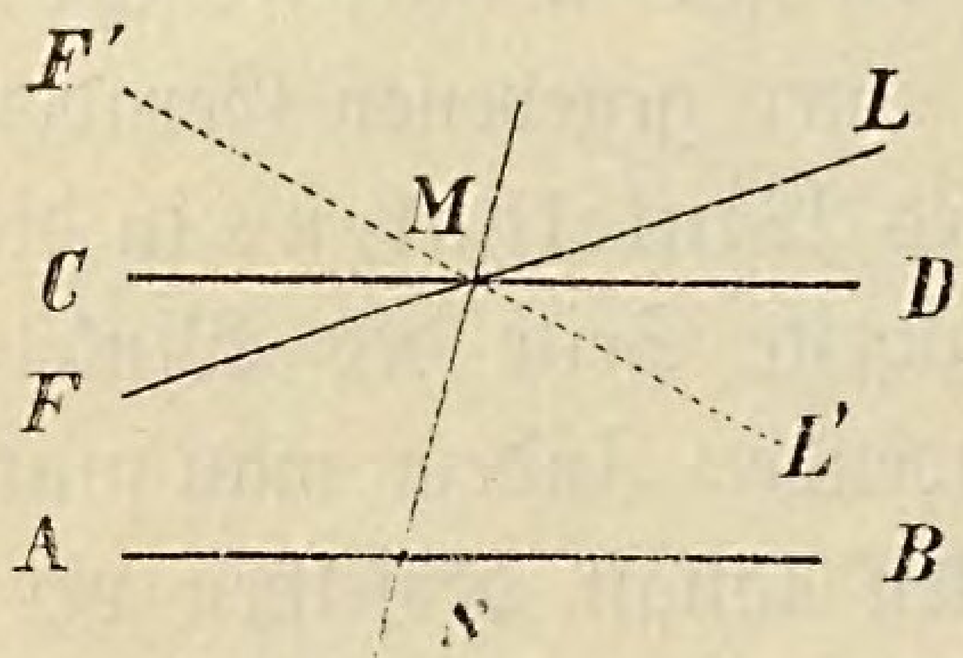
Lehrsatz. Schneiden sich zwei Gerade auf einer Seite einer dritten Geraden, so sind die auf dieser Seite liegenden inneren Gegenwinkel zusammen kleiner als 2 R.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittels 30 und 31.

Zusatz. Schneiden sich zwei Gerade, so ist kein Winkel den eine dritte Gerade mit denselben bildet, seinem Wechselwinkel oder korrespondierenden gleich.

34.

Lehrsatz. Unter allen Geraden, welche durch einen außerhalb einer Geraden (AB) liegenden Punkt (M) gehen, kann nur eine der Geraden AB parallel sein.



Beweis. Sei CD eine durch M zu AB gezogene Parallele, FL eine beliebige andere durch M gezogene Gerade, (MS eine Schneidende), so wird AB (nach 31) entweder von dem Strahle MF geschnitten, wenn $\sphericalangle$ FMS $<$ CMS, oder von dem Gegenstrahle ML, wenn $\sphericalangle$ FMS $<$ CMS.

35.

Lehrsatz. Eine Gerade, welche die eine von zwei parallelen Geraden schneidet, schneidet auch die andere.

Beweis durch 34.

Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel beziehungsweise parallel, so sind die Winkel entweder gleich oder supplementär. Man unterscheide die 3 möglichen Fälle!

36.

Lehrsatz. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis indirekt durch 20 u. 35; oder direkt durch 35, 32 Z., 5 u. 30 Z.

37.

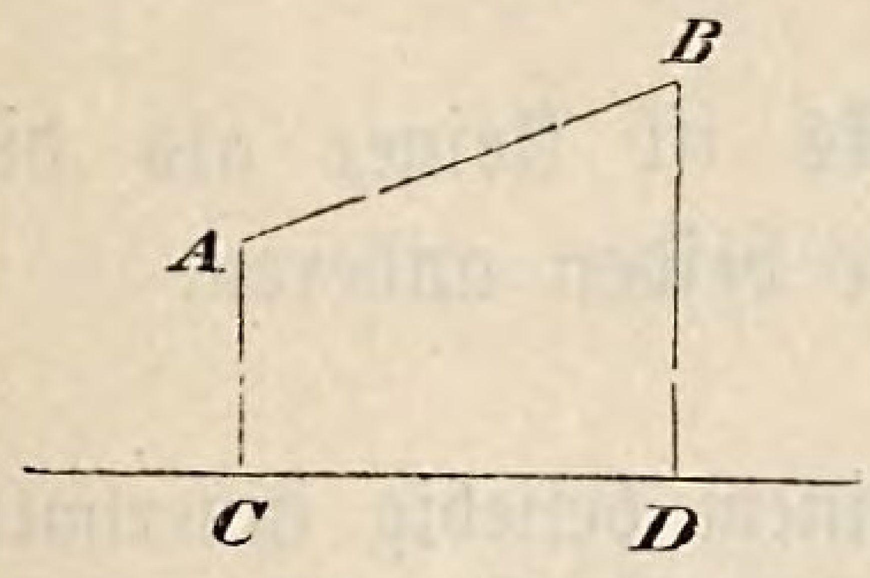
Senkrechte. **Lehrsatz.** Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden nur eine senkrechte Gerade, der Punkt mag

a) in der Geraden, oder

b) außerhalb der Geraden liegen.

Beweis zu a) durch 23, 22; oder indirekt durch 23, 9.

b) direkt durch 33, oder indirekt durch 30.



Anmerkung. Der Fußpunkt C der Senkrechten, welche von einem Punkte (A) auf eine Gerade gefällt ist, heißt die (senkrechte oder orthogonale) Projektion des Punktes (A) auf die Gerade. Die Strecke auf der Geraden CD, welche von den Projektionen der Punkte A u. B begrenzt wird, heißt die (senkrechte oder orthogonale) Projektion der Strecke AB auf die Gerade CD. Die Senkrechten AC, BD heißen Projicierende.

Lehrsätze. α) Stehen zwei Gerade auf einer dritten Geraden senkrecht, so sind die zwei Geraden parallel.

β) Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so auch die andere.

II. Abschnitt.

Vom Dreieck.

38.

Erklärungen. Werden zwei sich schneidende Gerade außerhalb ihres Durchschnittspunktes von einer dritten Geraden geschnitten, so begrenzen die drei Geraden eine ebene Figur, Dreieck genannt.

Die drei Schnittpunkte der Geraden heißen Ecken, die von den Eckpunkten begrenzten Strecken heißen Seiten des Dreiecks. Die Summe der Seiten heißt Umfang.

Hat man irgend eine Seite des Dreiecks zur Grundlinie gewählt, so heißt das gegenüberliegende Eck die Spitze, und eine von der Spitze auf die Grundlinie oder deren Verlängerung gefällte Senkrechte die Höhe des Dreiecks.

Durch die Höhe werden zwei Seiten des Dreiecks auf die dritte projiciert.

Eine zwei beliebige Punkte des Umfangs verbindende Strecke die nicht mit einer Seite zusammenfällt, heißt Transversale.

39.

Beziehung zwischen den Seiten.

Lehrsatz. Jede Seite des Dreiecks ist kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen.

Beweis durch 15 und 8a.

Lehrsätze. *α*) Zieht man von einem beliebig innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte aus gerade Linien nach den Endpunkten einer Seite, so ist die Summe dieser Strecken kleiner als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten. Beweis. Man verlängert eine der Strecken bis zum Umfange und wendet 15 an.

β) Die Summe der drei Strecken, die von einem Punkte innerhalb des Dreiecks nach den drei Ecken laufen, ist kleiner als der Umfang und größer als der halbe Umfang des Dreiecks.

40.

Erklärung. Unter dem Außenwinkel eines Dreiecks versteht man denjenigen Winkel, welchen eine Dreiecksseite mit der Verlängerung einer andern bildet.

Außenwinkel.

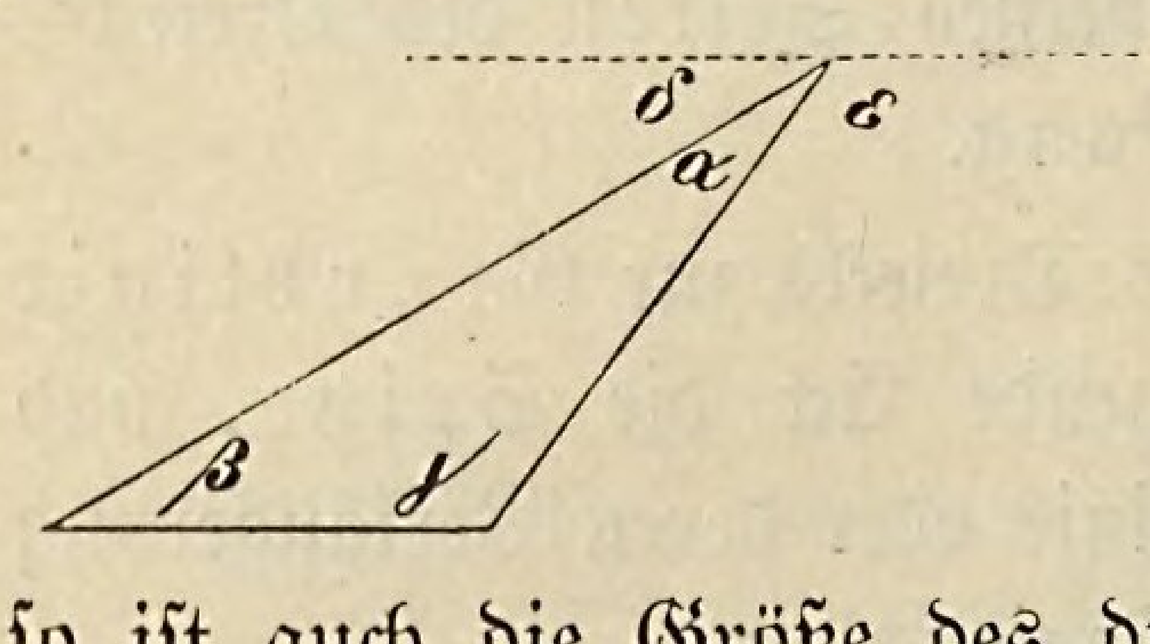
Lehrsatz. Der Außenwinkel ist der Summe der beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkel des Dreiecks gleich.

Beweis. Der Außenwinkel wird durch eine zur gegenüberliegenden Seite parallele Gerade in zwei Teile geteilt, von welchen jeder einem der inneren Winkeln nach 32 Z. gleich ist.

41.

Beziehung zwischen den Winkeln.

Lehrsatz. Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt 2 R. Beweis durch 40, oder durch eine Parallele und 32 Z., 26 Zus.



Zusatz. Kennt man zwei Winkel eines Dreiecks oder deren Summe, so ist auch die Größe des dritten Winkels bekannt.

Lehrsätze. *α*) Die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks ist 4 R.

β) Teilt man einen Winkel des Dreiecks durch eine Gerade, so schneidet diese die gegenüberliegende Seite des Dreiecks. Zum Beweise wird 31 zweimal angewendet.

γ) Zieht man von einem beliebig im Umfange oder innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte aus Gerade nach den Endpunkten einer Seite, so ist der von denselben gebildete Winkel größer als der Winkel, den die beiden anderen Dreiecksseiten einschließen.

42. Folgerungen aus 41 und Erklärungen.

Ein Dreieck kann nur einen rechten oder stumpfen Winkel haben. Im ersteren Falle heißt es rechtwinklig, im zweiten stumpfwinklig. Die im rechtwinkligen Dreieck dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt Hypotenuse, die beiden anliegenden Seiten heißen Katheten.

Die beiden spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks geben zusammen einen rechten, die des stumpfwinkligen weniger als einen rechten.

Anmerkung. Es ist gebräuchlich in dem Worte Katheten die vorletzte Silbe zu betonen, abweichend vom griechischen *κάθετοι*.

43.

Erklärung. Ein Dreieck, welches zwei gleich lange Seiten hat, heißt gleichschenklig. Die gleichen Seiten heißen Schenkel, die dritte Seite Grundlinie (Basis) des Dreiecks. Das gleichschenklige Dreieck.

Lehrsatz. Hat ein Dreieck zwei gleich lange Seiten, so sind auch die Winkel gleich, welche diesen Seiten gegenüberliegen (die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich). Die Winkel an der Grundlinie.

Beweis. Man denke sich den Winkel an der Spitze halbiert und drehe den einen Teil der Figur um die Halbierungslinie, so läßt sich die Kongruenz der fraglichen Winkel direkt erweisen. 22, 17, 16 Z.

Zusatz 1. Hat ein Dreieck drei gleiche Seiten, so hat es auch drei gleiche Winkel. Jeder Winkel des gleichseitigen Dreiecks ist $\frac{2}{3}$ R oder 60°.

Zusatz 2. Ist ein Winkel, oder ein Außenwinkel oder die Summe zweier bestimmter Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks gegeben, so sind alle Winkel des Dreiecks bestimmt.

Zusatz 3. Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind spitz.

Aufgaben. α) Ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist 60°; 42° 11′ 2,4″; n^0: wie groß sind die übrigen Winkel des Dreiecks?

β) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist 60°; 102° 45′ 11″; n^0; wie groß sind die übrigen?

γ) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks hat 179° 30′; n^0; wie groß sind die inneren Winkel?

δ) Die Summe aus dem Winkel an der Spitze und einem Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks beträgt 115°, wie groß sind die drei Winkel?

ε) Der Außenwinkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 120°; 135°; wie groß sind die drei inneren Winkel?

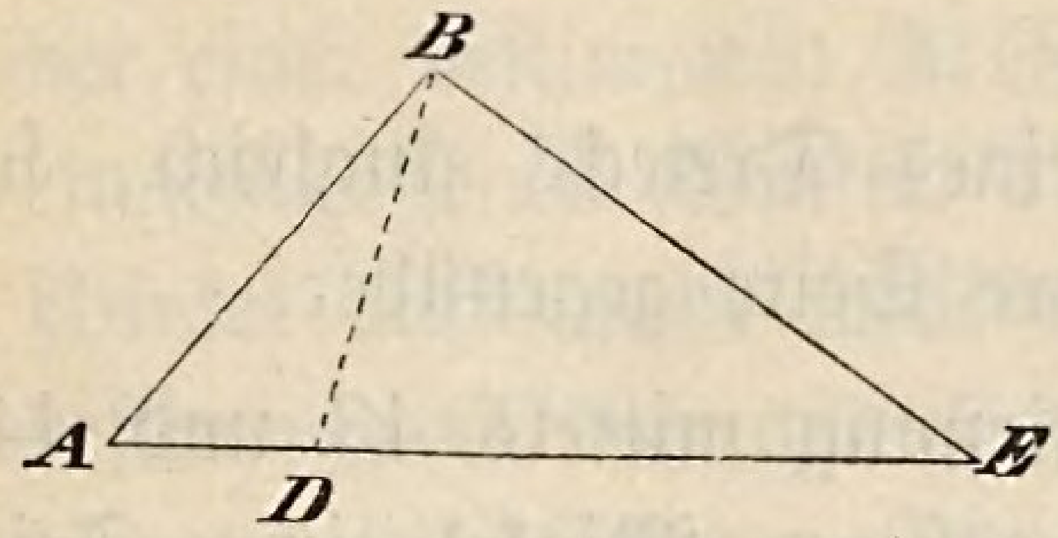
ζ) Lehrsatz. Die Gerade, welche den Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert, ist der Grundlinie parallel.

ϑ) Lehrsatz. Eine durch die Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes zur Grundlinie Parallele halbiert den Außenwinkel.

44.

Zwei Seiten ungleich.

Lehrsatz. Sind zwei Seiten eines Dreiecks ungleich, so liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.



Beweis. Man trägt die kleinere Seite EB auf der größeren EA ab, und zieht BD,

so ist ∢ EBD = ∢ EDB,

da nun ∢ EDB > ∢ A, (40) so ist auch

∢ EBD > ∢ A,

um so mehr ∢ EDB + ABD > ∢ A

oder ∢ ABE > ∢ A.

Um wieviel (welche Winkel der Figur) ist der größere Winkel größer als der kleinere?

Man beantwortet diese Frage durch folgenden Beweisgang:

$$EDB = A + ABD,$$

$$\text{somit } EBD = A + ABD$$

$$EBD + ABD = A + 2. ABD$$

$$ABE = A + 2. ABD$$

Zusatz. Ein Winkel, der nicht der größten Seite eines Dreiecks gegenüberliegt, ist spitz.

Beweis direkt durch 43 Zusatz 3, oder indirekt durch 44 und 42.

45.

Lehrsatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks gleich, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich. Zwei Winkel gleich.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittels 44.

Zusatz. Sind die drei Winkel eines Dreiecks gleich groß, so ist es gleichseitig.

Lehrsätze. a) Ist in irgend einem Dreiecke die Halbierungslinie eines Außenwinkels der gegenüberliegenden Seite parallel, so ist das Dreieck gleichschenklig.

b) Ist die Gerade, welche den Außenwinkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert, der gegenüberliegenden Seite parallel, so ist das Dreieck gleichseitig.

46.

Zwei Winkel ungleich.

Lehrsatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks ungleich, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittels 43 und 44 oder direkt, indem man von dem größeren Winkel einen Teil gleich dem kleineren abschneidet und 45 und 15 anwendet.

Zusatz 1. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse die größte Seite, im stumpfwinkligen die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende.

Zusatz 2. Die Senkrechte ist die kürzeste Linie, die von einem Punkte nach einer Geraden gezogen werden kann.

Zusatz 3. Die kürzeste Linie, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, steht auf der Geraden senkrecht.

Beweis indirekt: Wäre AB zwar die kürzeste aber nicht senkrecht, so könnte man von dem Punkte A eine Senkrechte auf die Gerade ziehen. Diese wäre dann nach Zusatz 2 kürzer wie AB gegen die Voraussetzung.

Anmerkung. Die von einem Punkte auf eine Gerade gezogene Senkrechte ist das Maß für den Abstand des Punktes von der Geraden.

Lehrsatz. Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite in zwei Abschnitte, von denen jeder kleiner ist, als die anliegende Dreiecksseite. 40 und 46 Lehrsatz.

III. Abschnitt.

Zwei Dreiecke.

47.

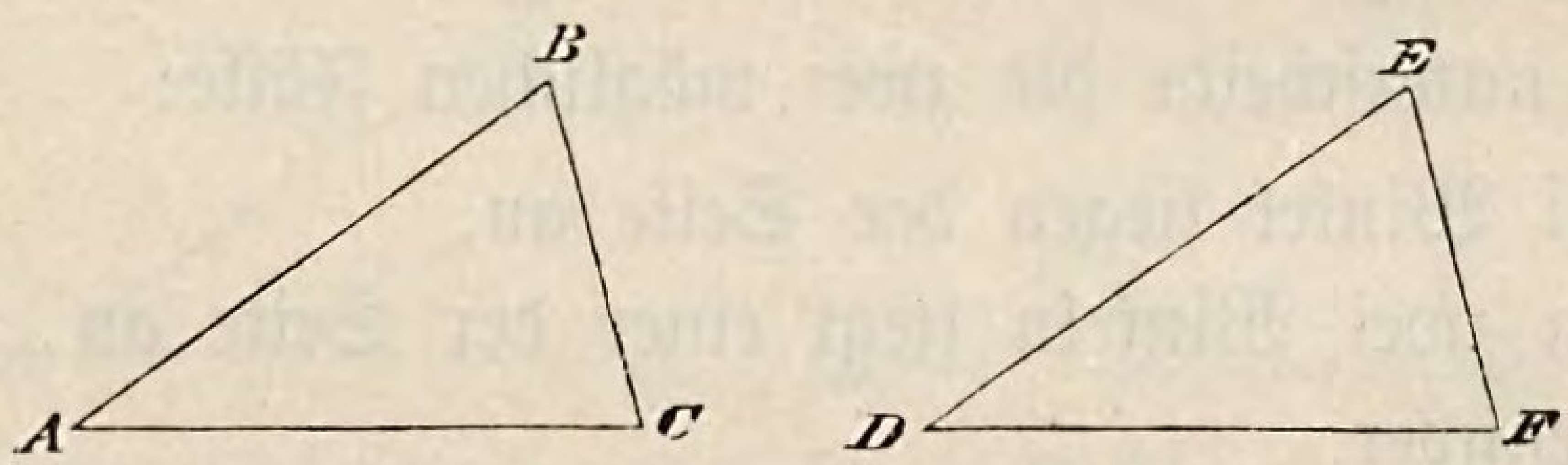
Allgemeines über Bestimmung eines Dreiecks.

Man erkennt schon aus dem zweiten Abschnitte, daß die sechs Merkmale eines Dreiecks, 3 Seiten und 3 Winkel, nicht von einander unabhängig sind, so daß 3 beliebige Strecken und 3 beliebige Winkel nicht immer zugleich einem Dreiecke angehören, selbst wenn bei der Auswahl derselben schon auf 39 und 41 Rücksicht genommen ist. Man sieht z. B. sofort, daß

bei einer bestimmten Größe von zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel, die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel nicht mehr willkürlich sind, sondern notwendig eine ganz bestimmte Größe und Lage erhalten. Es entsteht daraus allgemein die Frage: Durch wie viele und welche seiner sechs Merkmale ist ein Dreieck vollkommen bestimmt? Oder, was dasselbe ist: Welche Merkmale müssen in zwei Dreiecken gleich sein, damit auch die übrigen Merkmale nicht mehr von einander abweichen, die Dreiecke also abgesehen von ihrer Lage überhaupt nicht mehr von einander unterschieden werden können? Diejenigen Sätze, welche die Bedingungen angeben, deren Erfüllung uns von der Identität (Kongruenz) zweier Dreiecke überzeugt, heißen Kongruenzfälle (Kriterien, Erkennungsmittel der Kongruenz). (Vergl. 4.)

48.

Lehrsatz. (Erster Kongruenzfall.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck so groß sind wie im andern. Kongruenzfälle. I.



Voraussetzung $\sphericalangle A = \sphericalangle D$,
$AB = DE$,
$AC = DF$.

Behauptung $\triangle ABC \cong DEF$.

Beweis. Man lege Dreieck DEF so auf ABC, daß die Scheitel D und A der als gleich bekannten Winkel auf einander fallen. Sorgt man noch dafür, daß DF in die Richtung von AC fällt, so liegt $\triangle$ DEF fest und kann in keinem anderen Stücke mehr dem Dreieck ABC angepaßt werden.

Es fällt aber nun, wegen $DF = AC$, der Endpunkt F auf C (17).

Ferner fällt wegen $\sphericalangle D = A$ und Erfüllung der übrigen

in Nr. 22 vorgeschriebenen Bedingungen DE in die Richtung von AB.

Endlich fällt wegen DE = AB und Erfüllung der übrigen in 17 vorgeschriebenen Bedingungen der Endpunkt E auf B.

Da nun auch die Strecken FE und CB mit ihren Endpunkten auf einander liegen, können sie nicht mehr von einander unterschieden werden (16), und die beiden Dreiecke decken sich vollständig.

Da man demnach die beiden Dreiecke (durch das eben gezeigte Verfahren) so auf einander legen kann, daß sie den nämlichen Teil der Ebene ausfüllen, daß also jeder Punkt in einem Dreieck zugleich ein Punkt im andern ist, so sind sie kongruent.

49.

II. **Lehrsatz.** (Zweiter Kongruenzfall.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn eine Seite und zwei bezüglich dieser Seite gleichliegende Winkel in dem einen Dreieck so groß sind wie im andern.

Man unterscheide die zwei möglichen Fälle:

a) die zwei Winkel liegen der Seite an,

b) von den zwei Winkeln liegt einer der Seite an, der andere ihr gegenüber.

Der Beweis zu a) wird durch Aufeinanderlegen der Dreiecke geführt nach dem Muster in 48 mit Hilfe von 17, 22, 22, 20; oder indem man nach Anwendung von 17, 22 die der Kongruenz nachteiligen Lagen des dritten Eckes mittelst 22 ausschließt.

Der Beweis zu b) wird durch 41 auf den ersten Fall zurückgeführt.

Anmerkung. Fällt man im rechtwinkligen Dreieck aus dem Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so hat man drei Dreiecke, von welchen jedes mit dem anderen eine Seite gemeinschaftlich und die drei Winkel gleich hat, dennoch sind diese Dreiecke im allgemeinen nicht kongruent. Warum?

50.

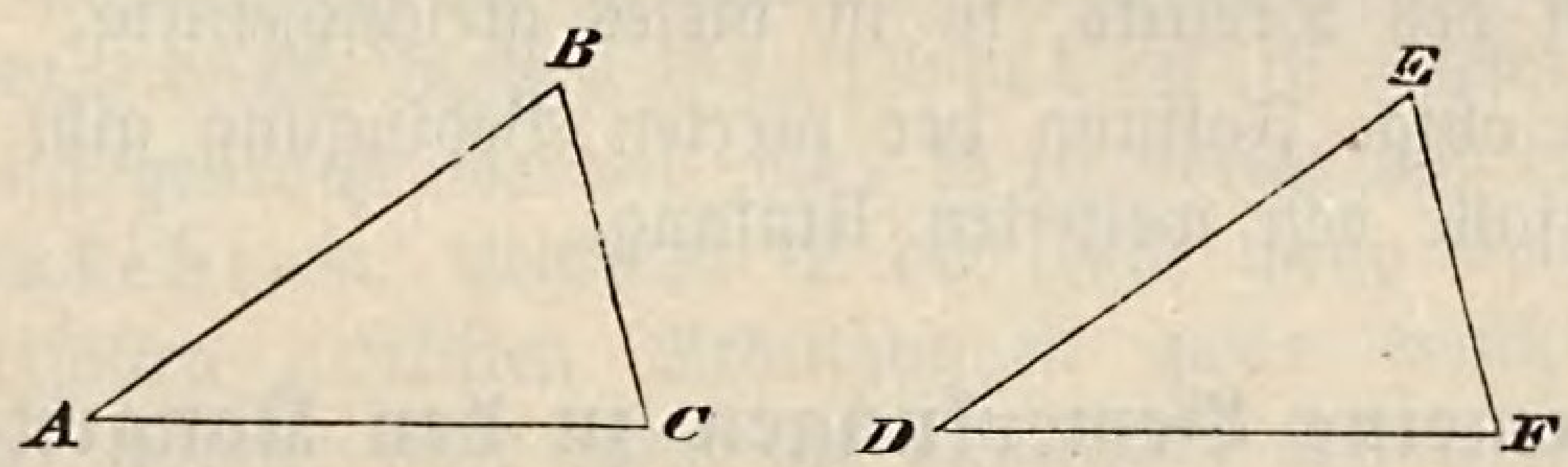
Lehrsatz. (Dritter Kongruenzfall.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des anderen einzeln gleich sind. III.

Beweis. Man denkt sich die zwei Dreiecke mit ihren größten Seiten an einander gelegt und zieht die Verbindungslinie der gegenüberliegenden Ecken. Dann läßt sich der Fall nach zweimaliger Anwendung von 43 mittels 8a auf den ersten Kongruenzfall zurückführen.

Anmerkung. Denkt man sich die Dreiecke nicht mit den größten Seiten an einander gelegt, so wird der Beweis weniger einfach.

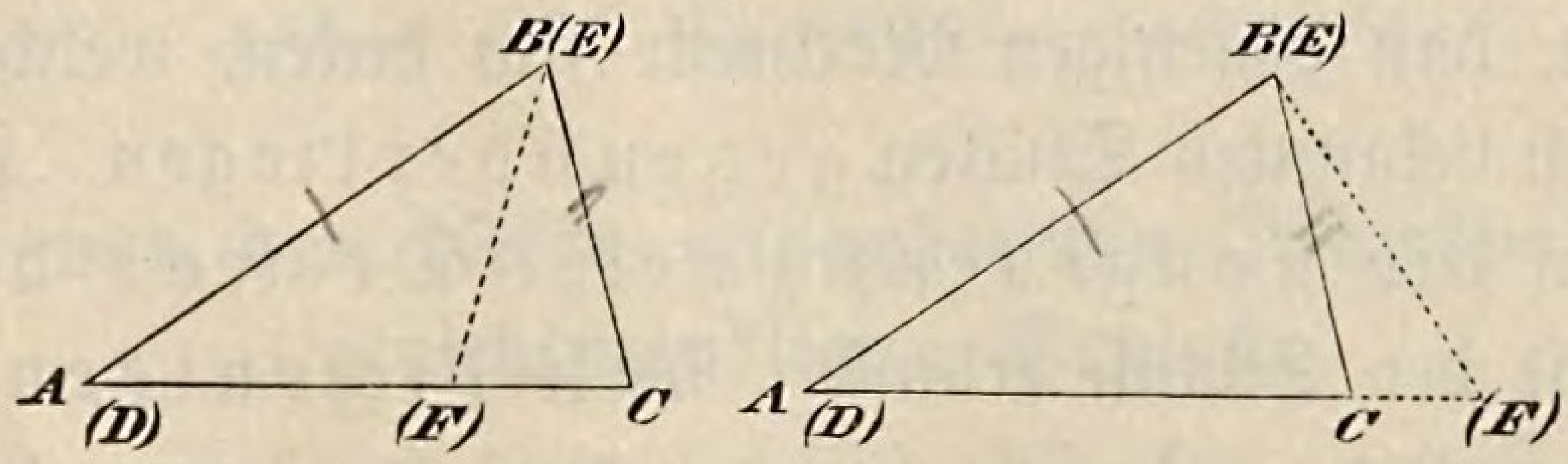
51.

Lehrsatz. (Vierter Kongruenzfall.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der Winkel, welcher der einen von diesen Seiten gegenüberliegt, in dem einen Dreieck so groß sind wie im andern, und wenn zugleich die den beiden anderen gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel nicht supplementär sind.*) VI.



Voraussetzung: $AB = DE$,
$BC = EF$,
$\sphericalangle A = \sphericalangle D$,
$\sphericalangle C + \sphericalangle F \gtrless 2R$.

Beweis. a. Durch Aufeinanderlegen: Die Kongruenz



des dritten Endpunktes wird indirekt durch Ausschließung erwiesen mittels 43, 26, 4 und Berücksichtigung der vierten Bedingung;

*) Sind die Winkel Rechte, so findet die Kongruenz nach II statt.

b. Durch Aneinanderlegen mit den Seiten BC, EF, wobei zwei mögliche Fälle ($\sphericalangle$ C $\overline{\underline{\diagdown}}$ R) zu unterscheiden sind. 43. 8a. 45. 50.

Zusatz 1 Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der der größeren von beiden gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck so groß sind wie im andern.

Der Beweis wird durch 44 Z. auf den Lehrsatz zurückgeführt.

Zusatz 2. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn die Hypotenuse und eine Kathete in dem einen Dreieck so groß sind wie im andern.

Anmerkung 1. Zieht man im gleichschenkligen Dreieck eine Transversale von der Spitze nach einem beliebigen Punkte der Grundlinie, so erfüllen die entstandenen Dreiecke die ersten 3 Bedingungen des vierten Kongruenzfalles, ohne im allgemeinen kongruent zu sein.

Anmerkung 2. Man soll den im Zus. 1 vorgetragenen Satz nicht an die Stelle des allgemeinen Lehrsatzes setzen; denn es gibt Fälle, in welchen die Kongruenz stattfindet, wenn 2 Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel übereinstimmen, z. B. in dem Beweise des Lehrsatzes:

Halbiert eine Transversale zugleich eine Seite und einen Winkel des Dreiecks, so ist dieses gleichschenklig.

Die obige Fassung der vierten Bedingung gibt dem Kongruenzfalle den weitesten Umfang.

52. Allgemeine Bemerkungen zu den Kongruenzfällen.

Schlüsse aus der Kongruenz.

a) Aus der Kongruenz zweier Dreiecke folgt, daß jedem der 6 Merkmale des einen Dreiecks ein gleiches im andern Dreieck entspricht, und es sind im allgemeinen diejenigen Merkmale gleich, welche aufeinander zu liegen kommen. Vergleicht man die einzelnen Kongruenzfälle, so bemerkt man, daß diejenigen Merkmale sich decken, welche den als gleich bekannten Stücken gegenüberliegen. Hat man also die Kongruenz zweier Dreiecke bewiesen, so ist der Schluß erlaubt, daß diejenigen Stücke einander gleich sind, welche den als gleich bekannten Stücken gegenüberliegen.

Bestimmungsstücke des Dreiecks.

b) Aus den Sätzen 48 bis 51 ergibt sich, daß ein Dreieck bestimmt ist:

1) Durch 2 Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel;

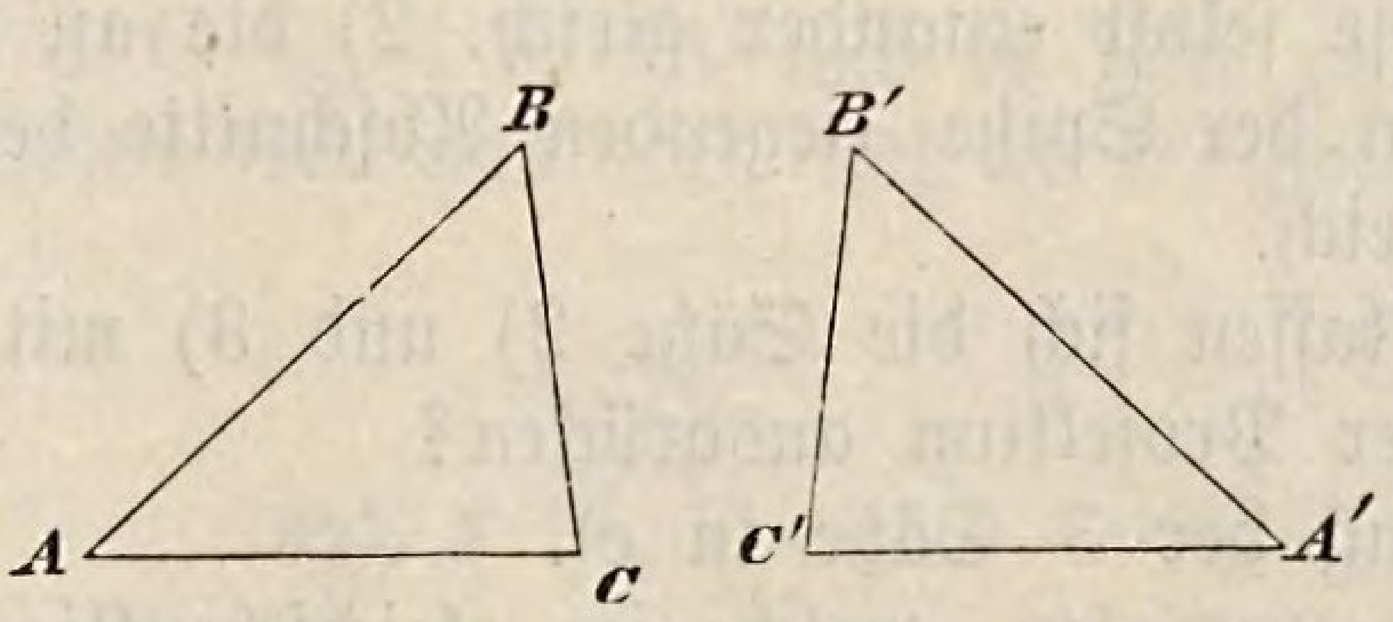
2) durch eine Seite und zwei Winkel, deren Lage gegen diese Seite bekannt ist;

3) durch 3 Seiten.

4) durch 2 Seiten und den Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüberliegt, wenn man noch dazu weiß, ob der der andern Seite gegenüberliegende Winkel spitz oder stumpf ist, also z. B. durch 2 Seiten und den der größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel. 44 Z.

Es fördert die Deutlichkeit des Begriffes „bestimmt", wenn man an dieser Stelle durch Gebrauch des Zirkels und Lineals die Dreiecke aus ihren Bestimmungsstücken wirklich konstruiert, also die Fundamentalaufgaben in 124. 9, ausführt. Man kann sich dabei statt des Transporteurs auch der auf den 3. Kongruenzfall gestützten Uebertragungsweise des Winkels bedienen. 124. 6).

c) Zwei kongruente Dreiecke, die in einer Ebene liegen, können entweder durch bloßes Verschieben in dieser Ebene zur Deckung gebracht werden, oder es ist nötig, das eine derselben umzukehren. Letzteres ist der Fall, wenn die in den Kongruenzfällen gestellten Bedingungen zwar erfüllt sind, die gleichen Stücke aber nicht im nämlichen Sinne der Drehung auf einander folgen. (Symmetrielage.) Symmetrielage.



53. Die von den Ecken ausgehenden Transversalen im gleichschenkligen Dreieck.

Zieht man im gleichschenkligen Dreieck eine Transversale so, daß in Folge der Konstruktion a) der erste, b) der zweite, c) der dritte Kongruenzfall gegeben ist, so erhellt, daß die Halbierung des Winkels an der Spitze, die senkrechte Stellung der Transversale im gleichschenkligen Dreieck.

Transversale gegen die Grundlinie und die Halbierung der Grundlinie so mit einander zusammenhängen, daß durch Herstellung des einen immer zugleich auch die beiden anderen gemacht werden. Man erhält somit folgende Lehrsätze:

a) 1) Halbiert man im gleichschenkligen Dreieck den Winkel an der Spitze durch eine Gerade, so halbiert diese auch die Grundlinie und steht auf derselben senkrecht.

2) Fällt man im gleichschenkligen Dreieck eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundlinie, so halbiert sie die Grundlinie und den Winkel an der Spitze. (Die Projektionen der Schenkel auf die Grundlinie sind gleich.)

3) Verbindet man die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie, so steht die Transversale auf der Grundlinie senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

b) Ein Dreieck ist gleichschenklig,

1) wenn eine Höhe des Dreiecks einen Winkel desselben halbiert,

2) wenn eine Höhe des Dreiecks eine Seite desselben halbiert, (wenn die Projektionen zweier Dreiecksseiten auf die dritte gleich lang sind),

3) wenn eine Transversale zugleich einen Winkel und eine Seite des Dreiecks halbiert.

c) Fällt man von den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks Senkrechte auf die Schenkel, so sind 1) diese selbst einander gleich, 2) die an der Grundlinie, 3) die an der Spitze liegenden Abschnitte der Schenkel einander gleich.

Wie lassen sich die Sätze 2) und 3) mit Hilfe des Begriffes der Projektion ausdrücken?

d) Umkehrung der 3 Sätze in c).

e) Die Transversalen, welche im gleichschenkligen Dreiecke von den Endpunkten der Grundlinie nach den Mittelpunkten der Schenkel gezogen werden, sind gleich.

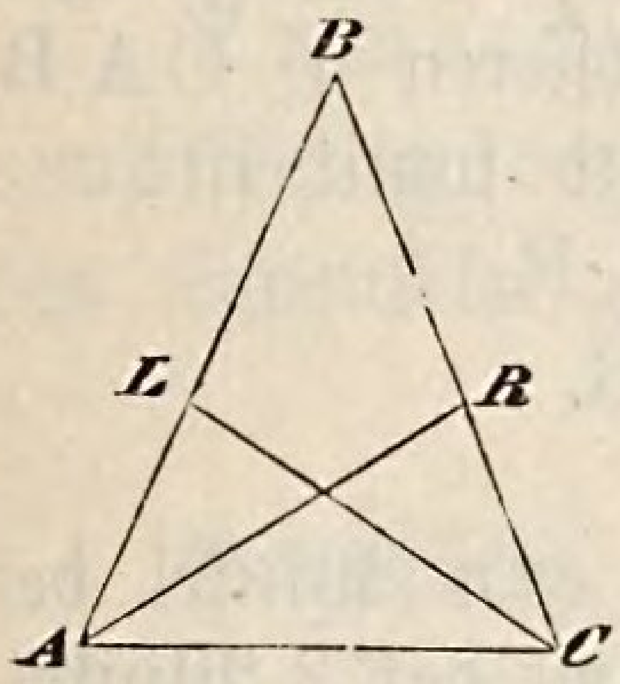
f) Sind in einem Dreieck die Transversalen gleich, welche zwei Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, so sind auch diese Seiten gleich und somit das Dreieck gleichschenklig.

Der Beweis dieses Satzes kann mit den bisher gebotenen Mitteln geführt werden, indem man von den Halbierungs-

punkten aus Senkrechte auf die Grundlinie zieht, dieselben um ihre eigene Länge verlängert und vier Kongruenzen nachweist. Indessen ergibt er sich leichter nach § 61.

g) Im gleichschenkligen Dreiecke sind die Transversalen gleich, welche die Winkel an der Grundlinie halbieren.

h) Sind in einem Dreiecke die Transversalen gleich, welche zwei Winkel des Dreiecks halbieren, so sind auch die den halbierten Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, somit das Dreieck gleichschenklig.



Voraussetzung $\sphericalangle$ BAR = CAR,
$\sphericalangle$ BCL = ACL,
AR = CL,

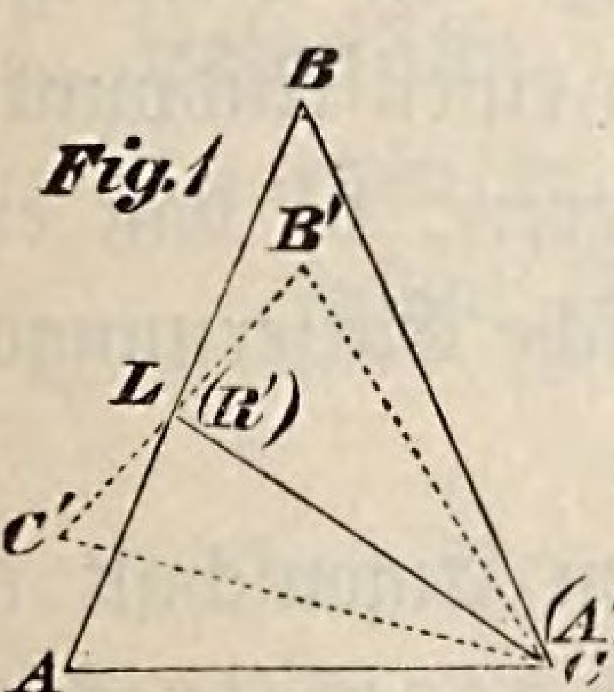
Behauptung BC = BA.

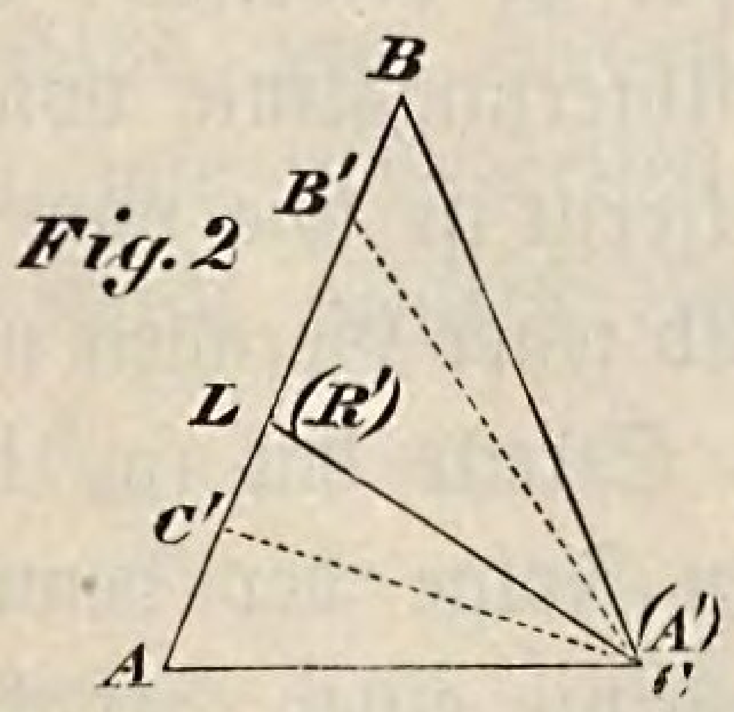
Beweis.*) Man denke sich zu dem gegebenen Dreiecke ABC ein zweites, diesem kongruentes Dreieck A′B′C′ konstruiert, so daß die in beiden analog bezeichneten Strecken und Winkel gleich sind. Wäre nun BA $\gtrless$ BC, so wären die Winkel BCA und BAC ungleich und der Konstruktion gemäß auch $\sphericalangle$ BCA $\gtrless$ B′A′C.

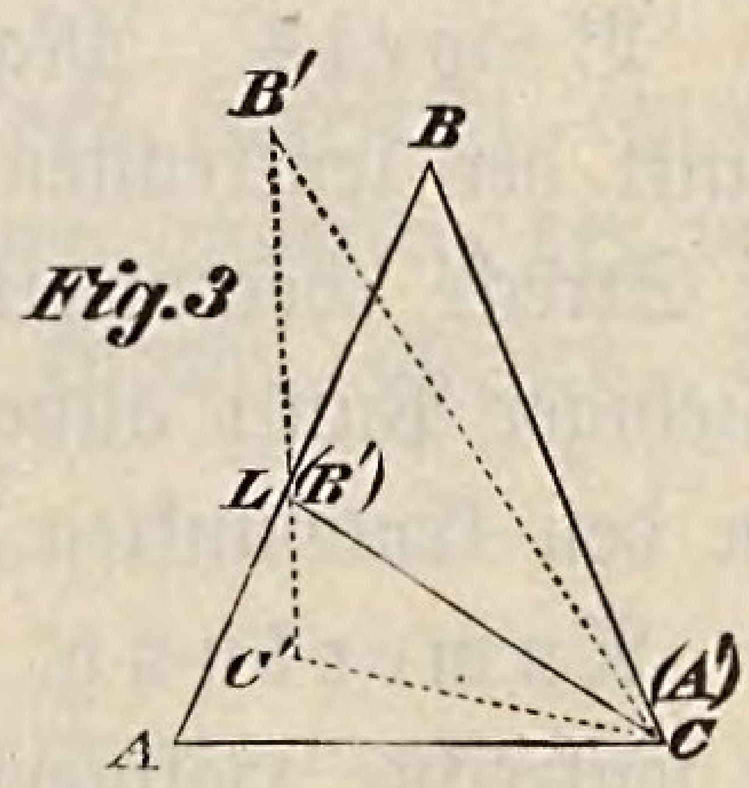
Es ist nun zu zeigen, daß keiner der Winkel kleiner sein kann, als der andere, daß also z. B. B′A′C′ < BCA unmöglich ist.

Zu diesem Zwecke kehre man das Dreieck A′B′C′ um und lege es (Figur 1 der folgenden Seite) so auf das $\triangle$ ABC, daß A′ auf C und A′R′ in die Richtung von CL fällt, so fällt R′ auf L (17).

Ist nun, wie angenommen, $\sphericalangle$ B′A′C′ < BCA, so ist auch $\frac{1}{2}$ B′A′C′ < $\frac{1}{2}$ BCA und es fällt zugleich (Fig. 1) A′B′ zwischen CL und CB, und A′C′ zwischen CL und







CA (22), während der Endpunkt B′ 1) in das Dreieck CBL oder 2) in den Umfang zwischen L und B oder 3) außerhalb des Dreiecks ABC zu liegen kommen kann. Die

*) Der Anfänger kann diesen Beweis übergehen.

ersten beiden Lagen (Fig. 1 und 2) sind unmöglich, weil in beiden Fällen $\sphericalangle$ B' $>$ B sein müßte (41 γ), was der Konstruktion widerspricht.

Die dritte Lage (Fig. 3) ist unmöglich, weil sie zu dem Schlusse führt, daß in dem Dreiecke A C' L (C' liegt dann notwendig im $\triangle$ C A L) die Winkelsumme größer als 2 R wäre, denn $\sphericalangle$ A C' L + (A' C' B' + A' C' A) = 4 R
oder, da $\sphericalangle$ A' C' A = C A C' (A' C' = A C),
$\sphericalangle$ A C' L + (A' C' B' + C A C') = 4 R

Ersetzt man zugleich $\sphericalangle$ A' C' B' durch den ihm gleichen Winkel A C B, und $\sphericalangle$ C A C' durch den größeren $\sphericalangle$ C A B, so wird die linke Seite dadurch größer, und somit ist:

$\sphericalangle$ A C' L + (A C B + C A B) $>$ 4 R,
$\sphericalangle$ A C' L + (2 R — A B C) $>$ 4 R,
$\sphericalangle$ A C' L — A B C $>$ 2 R,

umsomehr $\sphericalangle$ A C' L $>$ 2 R, somit schon ein Winkel des Dreiecks größer als 2 R, umsomehr die Summe der 3 Winkel.

Analoge Schlüsse widerlegen die Annahme $\sphericalangle$ B C A $<$ B' A' C'.

Somit ist B' A' C' = B C A, oder B A C = B C A und B C = B A.

i) Welche Lehrsätze lassen sich aus den vorstehenden Sätzen für die Transversalen des gleichseitigen Dreiecks ableiten?

k) Welche Lehrsätze ergeben sich daraus unmittelbar für die Transversalen im ungleichseitigen Dreieck?

54.

Die senkrechte Halbierungslinie einer Strecke.

Lehrsatz. Die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke, welche sich über einer gegebenen Strecke (als Basis) errichten lassen, liegen in der Senkrechten, welche die Strecke halbiert.

Beweis. Man hat zu beweisen, a) daß ein beliebiger Punkt der senkrechten Halbierungslinie von dem einen Endpunkte der Strecke ebensoweit entfernt ist wie vom anderen; b) daß ein beliebiger Punkt außerhalb jener Geraden ungleiche Entfernungen von den Endpunkten der Strecke hat (a, 15).

Anmerkung. In Folge der bewiesenen Eigenschaft ist die senkrechte Halbierungslinie einer Strecke der geometrische Ort aller Punkte, die von den zwei Endpunkten der Strecke gleichen Abstand haben.

Zusatz 1. Es gibt einen Punkt, welcher von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten gleich weit absteht.

Zusatz 2. Es giebt keinen Punkt, welcher von drei oder mehreren in gerader Linie liegenden Punkten gleich weit absteht.

Zusatz 3. Man kann von einem Punkte nach einer Geraden nur zwei einander gleiche Strecken ziehen.

55.

Lehrsatz. Alle Punkte, welche von den beiden Schenkeln eines Winkels gleich weit abstehen, liegen in der Geraden, welche den Winkel halbiert. Beweis durch 49; dann 15, 46 Zus. 1. Die Halbierungslinie des Winkels.

Anmerkung. Die den Winkel halbierende Gerade ist somit der geometrische Ort aller Punkte, welche von den beiden Schenkeln gleichen Abstand haben.

56.

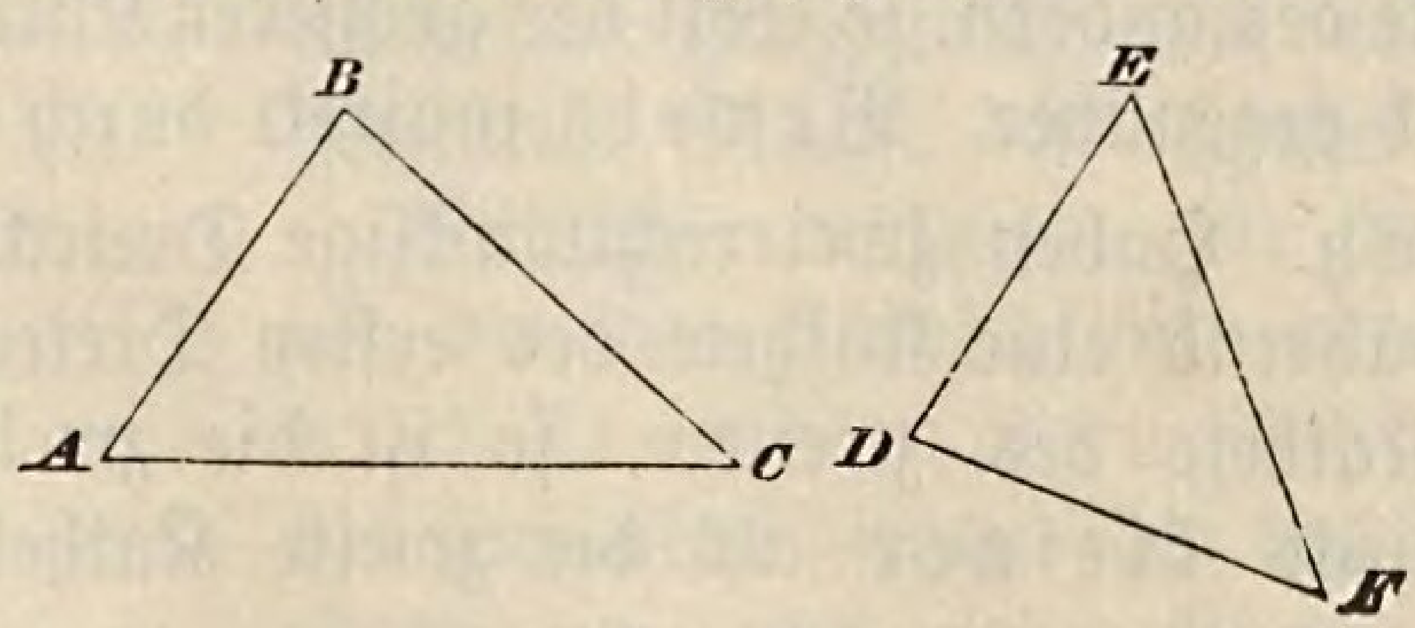
Lehrsätze. a) Die drei Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist von den drei Seiten gleich weit entfernt. Schnittpunkt der Winkel-halbierungs-Transversalen.

Beweis. Man zeige, daß zwei dieser Halbierungslinien sich in einem Punkte schneiden, und daß dieser Punkt von den drei Seiten gleich weit absteht. Sodann ziehe durch den Schnittpunkt und das dritte Eck eine Gerade. Von dieser läßt sich nachweisen, daß sie den dritten Winkel halbiert. (51 Zusatz 2.)

b) Die in den Mittelpunkten der drei Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt ist von den 3 Ecken gleich weit entfernt. Beweis durch 54. Schnittpunkt der senkrechten Halbierungslinien.

57.

Lehrsätze. a) Sind zwei Seiten eines Dreiecks einzeln eben so groß, wie zwei Seiten eines anderen, der vom ersten Seitenpaare eingeschlossene Winkel größer, als der vom zweiten eingeschlossene, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber. Ungleiche Winkel zwischen gleichen Seiten.



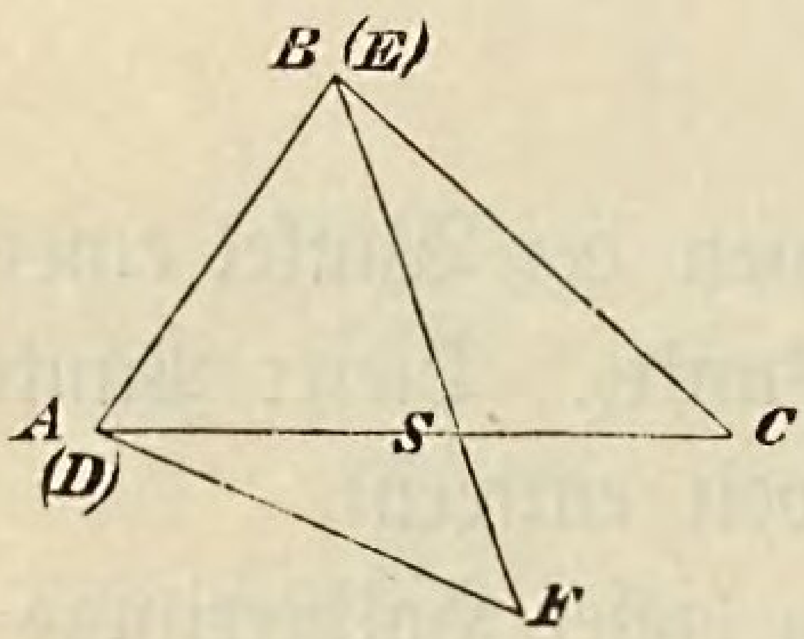
Voraussetzung: $AB = DE$

$BC = EF$

$\sphericalangle B > \sphericalangle E$

Behauptung: $AC > DF$

Beweis. Die Dreiecke werden mit zwei als gleich bekannten Seiten auf einander gelegt und 3 Fälle unterschieden, je nachdem der Endpunkt vom zweiten Schenkel des kleineren Winkels in den Umfang, innerhalb oder außerhalb des Dreiecks fällt; der erste Fall erledigt sich sofort (9), der zweite durch 14 oder 39 α, der dritte durch 15 in folgender Weise:



$AS + SF > DF$

$CS + SE > BC$

Addition 2c.

b) Sind zwei Seiten eines Dreiecks einzeln ebenso groß wie zwei Seiten eines anderen Dreiecks, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Beweis indirekt durch Ausschließung mittelst 48 und 57 a).

Gleiche Hypotenusen.

c) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, während ein spitzer Winkel des einen größer ist als ein spitzer Winkel des andern Dreiecks, so liegt dem größeren Winkel die größere Kathete gegenüber.

Beweis durch Aufeinanderlegen: 22, 46 Zus. 2.

d) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, während eine Kathete des einen Dreiecks größer ist als eine Kathete des andern, so liegt der größeren Kathete der größere Winkel gegenüber. Beweis indirekt durch Ausschließung.

Zusatz. Haben zwei rechtwinklige Dreiecke gleiche Hypotenusen, während eine Kathete des ersten Dreiecks größer ist als eine Kathete des zweiten, so ist die zweite Kathete des ersten Dreiecks kleiner als die zweite Kathete des zweiten.

Gleiche Katheten.

e) Haben zwei rechtwinklige Dreiecke eine Kathete gleich, aber ungleiche Hypotenusen, so sind die beiden anderen Katheten im Sinne der Hypotenusen ungleich; und umgekehrt.

Zusatz. Von zwei Strecken, welche von einem Punkte aus nach einer Geraden gezogen sind, ist diejenige die längere, deren Endpunkt weiter vom Fußpunkte der von diesem Punkte auf die Gerade gefällten Senkrechten absteht (somit diejenige, welche die größere Projektion hat), und umgekehrt.

IV. Abschnitt.

Vom Viereck.

58.

Erklärung. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur heißt Viereck. Seiten, Ecken, Winkel des Vierecks. Die von einem Ecke nach dem gegenüberliegenden gezogene Strecke heißt Diagonale.

Das Viereck hat zwei Diagonalen.

Der Umfang und die Diagonalen.

Lehrsätze. Die Summe der Diagonalen ist a) größer als die Summe von zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, b) kleiner als der Umfang des Vierecks und c) größer als der halbe Umfang desselben. Beweis durch 15.

59.

Winkelsumme.

Lehrsatz. Die Summe der Winkel des Vierecks beträgt 4 R. Beweis durch 41.

Lehrsätze. α) Die Summe der Außenwinkel des Vierecks ist 4 R.

β) Stehen die Schenkel zweier Winkel auf einander senkrecht, so sind die Winkel gleich oder supplementär.

Unterscheide zunächst 3 Fälle, je nachdem der Scheitel des einen Winkels in der Winkelebene des andern, außerhalb derselben, oder in einem Schenkel liegt, dann für die beiden ersten Fälle, ob der vom Scheitel nach dem Fußpunkte oder der entgegengesetzt gerichtete Strahl den Winkel bildet.

Endlich entscheidet für den dritten Fall, ob die den Winkel bildenden Strahlen auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Schenkels liegen, der den Scheitel enthält,

γ) Fällt man von einem Punkte, der außerhalb einer gegebenen Winkelebene liegt, Senkrechte

auf die Schenkel des Winkels, so schneidet die Halbierungslinie des von den Senkrechten gebildeten Winkels ein gleichschenkliges Dreieck ab. 42.

60.

Parallelogramm.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm.

61.

Eigenschaften.

Lehrsätze. (Eigenschaften des Parallelogramms.)

a) Eine Diagonale teilt das Parallelogramm in 2 kongruente Dreiecke.

b) Im Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel gleich. Beweis durch 32 oder 61 a.

c) Im Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich. Beweis durch 61 a.

d) Die beiden Diagonalen des Parallelogramms halbieren einander.

Beweis durch 61 c und 49.

Maß für den Abstand der Parallelen.

Zusatz. 1. Senkrechte zwischen Parallelen sind gleich groß. Die zwischen zwei Parallelen gezogene Senkrechte ist das Maß für den Abstand der beiden Parallelen.

Ist eine der Seiten des Parallelogramms als Grundlinie gewählt, so bildet ihr Abstand von der gegenüberliegenden Seite die Höhe des Parallelogramms.

Zusatz 2. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von einer Geraden einen gegebenen Abstand haben, ist die in dem gegebenen Abstande zur Geraden gezogene Parallele.

Lehrsatz. Eine Strecke, welche durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht und 2 Punkte des Umfanges verbindet, teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Figuren und wird selbst halbiert. Beweis durch Aufeinanderlegen der Vierecke und 49.

62.

Erkennungszeichen des Parallelogramms.

Lehrsätze. Ein Viereck ist ein Parallelogramm:

a) wenn die gegenüberliegenden Winkel des Vierecks gleich sind; Beweis durch 59 und 30;

b) wenn die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks gleich sind;

Beweis. Man ziehe eine Diagonale und erweise die Kongruenz der entstandenen Dreiecke.

c) wenn die Diagonalen des Vierecks einander halbieren.

Anmerkung. Ist auch die Umkehrung von 61 a richtig? Ist ein Viereck ein Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander gleich sind und auf einander senkrecht stehen? Wenn überdies eine der Diagonalen durch die andere halbiert wird?

63.

Lehrsätze. a) Sind zwei Seiten eines Vierecks gleich und parallel (╥), so ist das Viereck ein Parallelogramm.

b) Sind zwei Seiten eines Vierecks parallel, die beiden andern gleich lang, und die Summe von zwei gegenüberliegenden Winkeln $\lesseqgtr$ 2 R, so ist das Viereck ein Parallelogramm. Vergl. 76.

c) Sind zwei Seiten eines Vierecks parallel, und zwei gegenüberliegende Winkel gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

d) Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten und zwei gegenüberliegende Winkel gleich, und diese Winkel stumpfe oder rechte, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

64.

Nach 61 sind in jedem Parallelogramme sowohl die gegenüberliegenden Seiten als die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Sind in einem Parallelogramme zwei anliegende Seiten gleich, so sind demnach alle vier Seiten desselben gleich groß, und das Parallelogramm erhält den Namen Raute oder Rhombus. Ebenso hat die Gleichheit zweier anliegender Winkel die Gleichheit aller vier Winkel zu folge, die dann rechte sein müssen (59). Das rechtwinklige Parallelogramm heißt Rechteck. Ist endlich das Parallelogramm zugleich gleichseitig und rechtwinklig, so heißt es Quadrat. Somit ist das Quadrat ein besonderer Fall sowohl des Rechtecks als der Raute. Besondere Parallelogramme.

Will man von einem Parallelogramm aussagen, daß es weder rechtwinklig noch gleichseitig sei, so nennt man es Rhomboid.

65.

Gleichseitiges Parallelogramm.

Lehrsätze. Vom gleichseitigen Parallelogramme gilt:

a) Die Diagonalen stehen auf einander senkrecht.

b) Die Diagonalen halbieren die Winkel, durch deren Scheitel sie gehen.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen ist von den vier Seiten gleich weit entfernt.

66.

Lehrsätze. Ein Parallelogramm ist gleichseitig:

a) wenn seine Diagonalen auf einander senkrecht stehen;

b) wenn eine Diagonale einen der Winkel halbiert, durch deren Scheitel sie geht;

c) wenn der Schnittpunkt der beiden Diagonalen von zwei anliegenden Seiten gleich weit absteht.

67.

Ungleichseitiges Parallelogramm.

Lehrsätze. Vom ungleichseitigen Parallelogramme gilt:

a) Die Diagonalen bilden schiefe Winkel miteinander, und zwar liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

b) Die Diagonalen teilen die Winkel, durch deren Scheitel sie gehen, in ungleiche Teile, und zwar bilden sie mit der größeren Seite den kleineren Winkel.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen hat ungleiche Entfernungen von zwei anliegenden Seiten des Parallelogramms, und zwar liegt er der größeren näher als der kleineren.

Lehrsätze. α) Bilden die Diagonalen eines Parallelogramms schiefe Winkel mit einander, so ist das Parallelogramm ungleichseitig und zwar liegt dem stumpfen Winkel die größere Seite gegenüber (Umkehrung von a.)

β) Umkehrung von b.

γ) Umkehrung von c.

Anmerkung. Indirekte Beweise des ersten Teiles dieser Sätze sind in Nr. 65 und 66 enthalten, man versuche dieselben auch direkt zu erweisen.

68.

Bedingungen unter denen ein Viereck ein gleichseitiges Parallelogramm ist.

Lehrsätze. a) Das gleichseitige Viereck ist ein gleichseitiges Parallelogramm.

b) Geht von zwei auf einander senkrechten Strecken jede durch die Mitte der andern, so erhält man eine Raute, wenn man die Endpunkte der Strecken durch gerade Linien verbindet.

c) Halbieren die beiden Diagonalen eines Vierecks die Winkel, durch deren Scheitel sie gehen, so ist das Viereck ein gleichseitiges Parallelogramm.

d) Stellt man zwei gleiche Strecken so zusammen, daß jede durch die Mitte der andern geht, so begrenzen die Senkrechten, die man auf denselben in ihren Endpunkten errichtet, ein gleichseitiges Parallelogramm, dessen Winkel den von den beiden Strecken gebildeten Winkeln beziehungsweise gleich sind.

69.

Lehrsätze. Vom rechtwinkligen Parallelogramme gilt: Rechtwinkliges Parallelogramm.

a) Die Diagonalen sind einander gleich.

b) Die beiden Diagonalen bilden mit jeder einzelnen Seite zwei gleich große Winkel.

c) Der Schnittpunkt der Diagonalen ist von allen Ecken gleich weit entfernt.

70.

Lehrsätze. Ein Parallelogramm ist rechtwinklig:

a) wenn nur ein Winkel als Rechter bekannt ist;

b) wenn seine Diagonalen gleich groß sind;

c) wenn die Diagonalen mit einer Seite gleiche Winkel bilden;

d) wenn der Schnittpunkt der Diagonalen von zwei anliegenden Ecken gleichweit absteht.

71.

Lehrsätze. Vom schiefwinkligen Parallelogramme gilt: Schiefwinkliges Parallelogramm.

a) Die Diagonalen sind ungleich, und zwar liegt dem stumpfen Winkel die größere Diagonale gegenüber.

b) Die beiden Diagonalen bilden mit einer Seite ungleiche Winkel, und zwar die größere Diagonale den kleineren Winkel.

c) Die Entfernungen der Ecken vom Schnittpunkte der Diagonalen sind ungleich, und zwar liegt der Scheitel des spitzen Winkels weiter entfernt als der des stumpfen.

Ein Parallelogramm ist schiefwinkelig:

α) Wenn es ungleiche Diagonalen hat, und zwar liegt der größeren Diagonale ein stumpfer Winkel gegenüber.

β) wenn die beiden Diagonalen mit einer Seite ungleiche Winkel bilden, und zwar bildet der größere Winkel einen Teil des stumpfen Winkels des Parallelogramms;

γ) wenn zwei Ecken ungleiche Abstände vom Schnittpunkte der Diagonalen haben, und zwar ist das entferntere Eck der Scheitel des spitzen Winkels.

72.

Bedingungen, unter denen ein Viereck ein rechtwinkliges Parallelogramm ist.

Lehrsätze. Ein Viereck ist ein rechtwinkliges Parallelogramm:

a) wenn seine vier Winkel gleich groß sind, wenn drei Winkel als Rechte bekannt sind ꝛc.;

b) wenn der Schnittpunkt der Diagonalen von allen vier Ecken gleich weit absteht;

c) wenn die Diagonalen mit jeder von drei Seiten des Vierecks zwei gleich große Winkel bilden.

73.

Quadrat.

Das Quadrat besitzt alle Eigenschaften des gleichseitigen und des rechtwinkligen Parallelogramms; welche demnach?

Lehrsätze. a) Stellt man zwei gleiche Strecken so zusammen, daß sie einander senkrecht halbieren, so erhält man ein Quadrat, wenn man ihre Endpunkte durch gerade Linien verbindet.

b) Ein Viereck ist ein Quadrat, wenn seine Diagonalen einander gleich sind und die Winkel halbieren durch deren Scheitel sie gehen.

74.

Trapez.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem nur zwei Seiten parallel sind, heißt Trapez. Der Abstand der parallelen Seiten von einander ist die Höhe des Trapezes.

Will man von einem Viereck aussagen, daß keine seiner Seiten der andern parallel ist, so nennt man es Trapezoid.

Lehrsätze. a) Eine Parallele, die man zu einer der konvergenten Seiten durch einen Endpunkt der kleineren Parallele des Trapezes zieht, zerlegt das Trapez in ein Parallelogramm und in ein Dreieck, welches mit dem Trapez gleiche Höhe und die Differenz der parallelen Seiten zur Grundlinie hat.

b) Die Strecke zwischen den Mittelpunkten der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist den parallelen Seiten parallel und gleich der halben Summe derselben.

Beweis. Man ziehe durch einen der Mittelpunkte eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite und verlängere die kleinere der beiden parallelen Seiten bis zum Durchschnitte mit derselben. 49. 61 c. 63 a.

c) Zieht man durch die Mitte einer der nicht parallelen

Seiten des Trapezes eine Parallele zu den parallelen Seiten, so geht diese auch durch die Mitte der vierten Seite (und ist der halben Summe der parallelen Seiten gleich).

Beweis indirekt (34), oder direkt durch zwei zur ersten Seite parallele Hilfslinien (61c und 49).

Zusatz 1. Ist eine Transversale, welche den parallelen Seiten des Trapezes parallel ist, zugleich die halbe Summe dieser Seiten, so geht sie durch die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten.

Beweis. Man ziehe durch den einen Endpunkt der Transversale eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite. 61c. 49.

Anmerkung. In Bezug auf eine etwa versuchte dritte Umkehrung des Lehrsatzes bedenke man: Steht eine Strecke (AB), welche vom Punkte A nach einer Geraden gezogen ist, im Punkte B schief auf der Geraden, so gibt es stets noch einen zweiten Punkt C auf der Geraden, welcher ebenfalls um eine Strecke gleich AB von A absteht.

Zusatz 2. Die in den vorstehenden Sätzen genannte Transversale (Mittellinie) halbiert die beiden Diagonalen des Trapezes, und die Strecke zwischen den Halbierungspunkten der Diagonalen ist der halben Differenz der parallelen Seiten gleich.

Zusatz 3. (Verallgemeinerung.) Teilt man eine der nicht parallelen Seiten eines Trapezes in n (eine beliebige Anzahl) gleiche Teile, und zieht durch die Teilpunkte Parallele zu den parallelen Seiten, so wird die gegenüberliegende Seite ebenfalls in n gleiche Teile geteilt.

Zusatz 4. (Verallgemeinerung.) Verbindet man zwei Parallele a und b durch eine Strecke, teilt diese in n gleiche Teile, und zieht durch die Teilpunkte zu a und b parallele Gerade, so wird durch diese Geraden jede zwischen den Parallelen a und b gezogene Verbindungsstrecke in n gleiche Teile geteilt.

75.

Man kann das Dreieck als einen besonderen Fall des Trapezes betrachten, indem man sich denkt, die kleinere der parallelen Seiten des Trapezes sei Null. Deshalb müssen die in 74 für die Mittellinie des Trapezes erwiesenen Sätze auch dem Dreiecke angepaßt werden können:

Parallele Transversalen im Dreieck.

Lehrsätze. a) Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten ist der dritten Seite parallel und gleich der Hälfte dieser Seite.

b) Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele zu einer zweiten Seite, so geht die Parallele durch die Mitte der dritten Seite (und ist die Hälfte der zweiten Seite).

Zusatz 1. Ist eine Transversale einer Seite des Dreiecks parallel und ihrer Hälfte gleich, so geht sie durch die Mittelpunkte der beiden andern Seiten.

Die selbständigen Beweise dieser Sätze können ganz ähnlich geführt werden, wie in 74.

Zusatz 2. Teilt man eine Dreiecksseite in eine beliebige Anzahl gleicher Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallele zu einer zweiten Seite, so wird dadurch die dritte Seite in eben so viele gleiche Teile geteilt.

76.

Antiparallelogramm.

Erklärung. Sind die nicht parallelen Seiten eines Trapezes einander gleich, so erhält dieses den Namen Antiparallelogramm.

Lehrsätze. Im Antiparallelogramme sind:

a) die den parallelen Seiten anliegenden Winkel einander gleich,
b) die gegenüberliegenden Winkel supplementär,
c) die beiden Diagonalen einander gleich.

Lehrsätze. Ein Trapez ist ein Antiparallelogramm:

α) wenn die Winkel gleich sind, welche einer der parallelen Seiten anliegen;

β) wenn zwei gegenüberliegende Winkel im Trapeze supplementär sind;

γ) wenn die Diagonalen des Trapezes gleich groß sind. 51 Zus. 2.

δ) Im Antiparallelogramm steht die Gerade, welche durch die Mittelpunkte der parallelen Seiten geht, auf diesen Seiten senkrecht.

Beweis durch senkrechte oder parallele Hilfslinien.

ε) Steht die Gerade, welche man durch die Mittelpunkte der parallelen Seiten eines Trapezes zieht, auf diesen Seiten senkrecht, so ist das Trapez ein Antiparallelogramm.

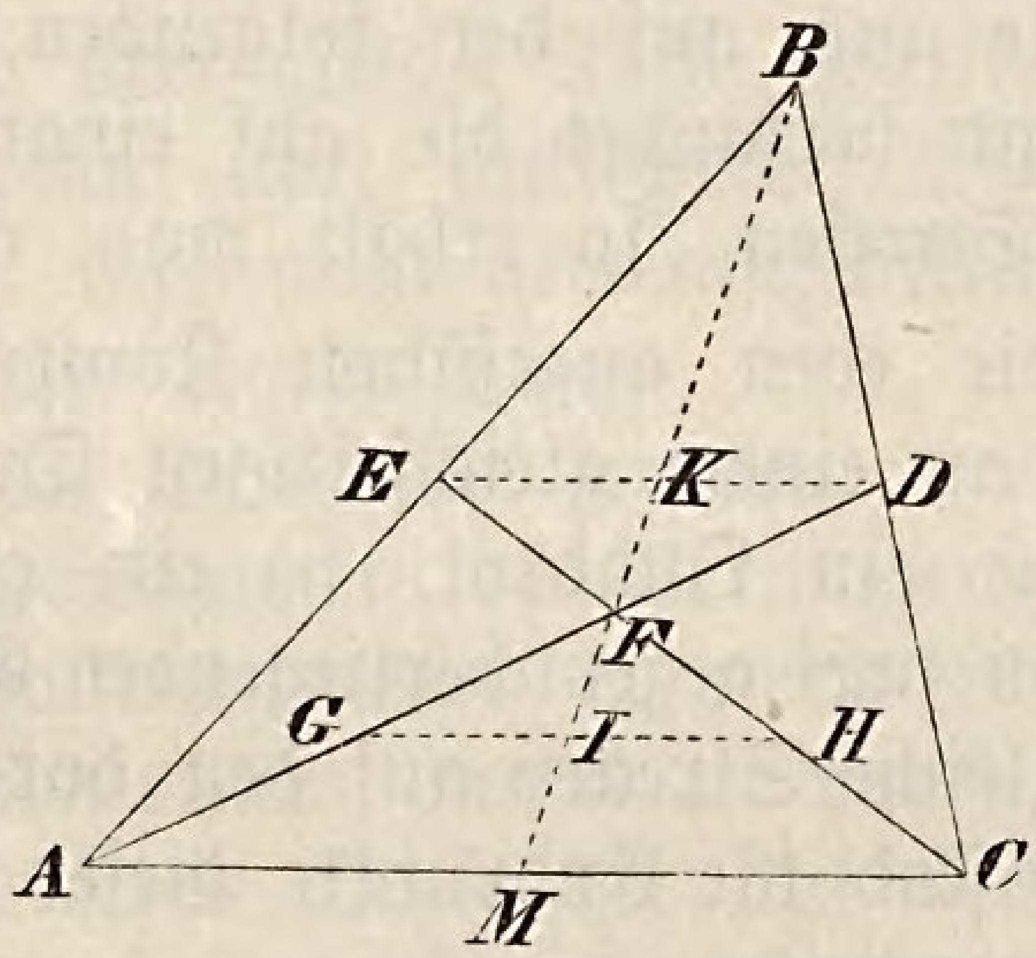
Lehrsatz. Ein Viereck ist ein Antiparallelogramm, wenn die einer Seite anliegenden Winkel und Seiten gleich sind.

77.

Lehrsätze. a) Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. *Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks.*

Der Beweis wird durch Parallele, die man zu den Seiten durch die Ecken zieht, auf 56 b zurückgeführt.

b) Die von den Eckpunkten nach den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Transversalen (Mittelpunktstransversalen) schneiden einander in einem Punkte, welcher von jedem Ecke um $^2/_3$ der betreffenden Transversalen entfernt ist. *Schnittpunkt der Mittelpunktstransversalen.*



Beweis. Man ziehe zwei der Mittelpunktstransversalen AD u. CE und zeige, daß die durch deren Schnittpunkt F gezogene Transversale BM durch die Mitte der dritten Seite geht.

Zu diesem Zwecke halbiere AF und CF in den Punkten G und H, so ist (nach 75a) $GH \mathrel{\overset{=}{\|}} ED$, und deshalb $\triangle GFH \cong DFE$, $GF = FD$, ferner $\triangle GFI \cong DFK$, folglich $GI = KD = \frac{1}{2} MC$; andererseits $GI = \frac{1}{2} AM$, also $MC = AM$.

78.

Lehrsätze zur Uebung. 1) a) Die Strecke zwischen dem Mittelpunkte der Hypotenuse und dem Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks ist der halben Hypotenuse gleich. *Uebungsstoff.*

Beweis. Man verlängere die Strecke um ihre eigne Länge. 62c. 70. 69.

b) Ist die Verbindungsstrecke zwischen einem Ecke und dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite der Hälfte dieser Seite gleich, so liegt der Seite ein rechter Winkel gegenüber. (72 b.)

2) Verbindet man die Halbierungspunkte der anliegenden Seiten eines Vierecks durch gerade Linien, so begrenzen diese ein Parallelogramm. Beweis durch 75.

3) Führt man die Konstruktion der vorigen Aufgabe a) an einem gleichseitigen, b) an einem rechtwinkligen Parallelogramme aus, so erhält man a) ein rechtwinkliges, b) ein gleichseitiges Parallelogramm. Warum?

4) Welche Figur wird erhalten, wenn man dieselbe Konstruktion an einem Antiparallelogramme ausführt?

5) Verbindet man die Halbierungspunkte zweier Gegenseiten eines Vierecks mit den Halbierungspunkten der beiden Diagonalen, so erhält man ein Parallelogramm.

6) Trägt man, indem man um ein Parallelogramm herumgeht, von jedem Ecke aus auf der folgenden Seite die nämliche Strecke ab, und verbindet die auf einander folgenden Endpunkte dieser Strecken, so erhält man ein Parallelogramm.

7) Führt man die eben angeführte Konstruktion a) an einem Quadrate, b) an einem gleichseitigen Dreieck aus, so erhält man wieder a) ein Quadrat, b) ein gleichseitiges Dreieck.

8) Trägt man von zwei gegenüberliegenden Ecken eines Parallelogramms aus gleiche Strecken auf den dort zusammenstoßenden Seiten auf, so sind die Endpunkte dieser 4 Strecken die Ecken eines Parallelogramms.

9) Führt man diese Konstruktion an einer Raute aus, so erhält man ein Rechteck.

10) Trägt man von zwei gegenüberliegenden Ecken eines Parallelogramms aus auf der durch die Diagonale bestimmten Geraden zwei gleich lange Strecken in entgegengesetzter Richtung auf und verbindet die Endpunkte dieser Strecken mit den Endpunkten der anderen Diagonale, so erhält man ein Parallelogramm.

11) Nimmt man die eben erwähnten Verlängerungen oder Verkürzungen an beiden Diagonalen zugleich, im gleichen Sinne und um die nämliche Strecke vor, so ist das durch Verbindung der vier Endpunkte erhaltene neue Parallelogramm mit dem ursprünglichen zugleich gleichseitig und ungleichseitig, rechtwinklig und schiefwinklig.

12) Von welcher Größe müssen die a) an einer, b) an beiden Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms vorgenommenen Verlängerungen oder Verkürzungen sein, damit man ein Rechteck erhält? (70.)

13) Halbiert man die Winkel eines Vierecks, so begrenzen die Halbierungslinien ein Viereck, dessen gegenüberliegende Winkel supplementär sind.

Anmerkung. Ein solches Viereck erhält man auch durch Halbierung der Außenwinkel.

14) Die Geraden, welche die Winkel eines Parallelogramms halbieren, begrenzen ein Rechteck.

15) Die Geraden, welche die Winkel eines Rechtecks halbieren, begrenzen ein Quadrat.

16) Halbiert man die Winkel, welche von den Diagonalen eines Parallelogramms gebildet werden, so sind die vier Durchschnittspunkte der Halbierungslinien mit den Seiten die Ecken eines gleichseitigen Parallelogramms.

17) Verbindet man die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten eines Parallelogramms mit den Endpunkten einer Diagonale, so wird durch diese Verbindungslinien die andere Diagonale in drei gleiche Teile geteilt.

18) Verlängert man zwei anliegende Seiten eines Parallelogramms über ihre nicht gemeinschaftlichen Endpunkte hinaus,
a) jede um ihre eigene Länge,
b) jede um die Länge der andern,
so liegen die Endpunkte der Verlängerungen mit dem vierten Ecke des Parallelogramms in einer Geraden.

19) Zieht man von einem Punkte in der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks Senkrechte auf die Schenkel, so ist die Summe dieser beiden Strecken der auf einen Schenkel gefällten Höhe gleich.

20) Zieht man von einem Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks Senkrechte nach den 3 Seiten, so ist die Summe dieser 3 Strecken der Höhe des Dreiecks gleich.

Beweis mit Hilfe des vorigen Satzes (19) und paralleler Hilfslinien.

21) Die Summe der drei Transversalen, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, ist kleiner als der Umfang des Dreiecks. Beweis durch 75.

79.

Bestimmungsstücke des Parallelogramms. Ueber Kongruenz der Vierecke im allgemeinen siehe den folgenden Abschnitt. Kongruenz der Parallelogramme.

Da ein Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke zerlegt wird, so ist das Parallelogramm durch eines dieser Dreiecke vollkommen bestimmt, sobald noch bekannt ist, welche Seite des Dreiecks Diagonale ist. Es kann also die Bemerkung b in 52 auch auf die Parallelogramme bezogen werden, wenn man die Diagonale von den übrigen Seiten

unterscheidet. Ebenso lassen sich die Kongruenzfälle der Dreiecke den Parallelogrammen anpassen:

Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, so sind auch die Parallelogramme kongruent, die durch die beiden Dreiecke bestimmt sind, wenn man gleiche Seiten der beiden Dreiecke zu Diagonalen wählt.

Diese letztere Bedingung ist notwendig, weil durch ein Dreieck im allgemeinen drei Parallelogramme von verschiedener Form bestimmt sind.

Ein Rhombus ist durch einen Winkel und eine Seite, ein Rechteck durch zwei anstoßende Seiten, ein Quadrat durch eine Seite bestimmt.

Oder: Rhomben, Rechtecke, Quadrate sind kongruent, wenn sie die eben genannten Bestimmungsstücke beziehungsweise gleich haben.

Weitere Bestimmungsstücke und Kongruenzfälle für die besonderen Parallelogramme lassen sich durch Beiziehen der Diagonalen und der von ihnen unter sich und mit den Seiten gebildeten Winkel leicht ableiten. Vgl. die eindeutigen Konstruktions-Aufgaben im Anhange zum ersten Teil Nr. 132.

Ein Trapez ist bestimmt, wenn das in 74a erwähnte Dreieck bestimmt und dazu noch ein von diesem Dreiecke unabhängiges Stück bekannt ist, z. B. die Länge einer der Parallelen. Im allgemeinen genügen vier von einander unabhängige Merkmale, während zur Bestimmung des Antiparallelogramms drei solche Merkmale hinreichen. Vgl. Anhang Nr. 133.

V. Abschnitt.

Vom Vieleck (Polygon).

80.

Erklärungen. Eine von geraden Linien begrenzte ebene Figur heißt im allgemeinen Polygon. Die begrenzenden Strecken heißen Seiten des Polygons, die Grenze selbst Umfang (Perimeter). Eine Strecke, welche zwei Ecken eines Polygons verbindet, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, heißt Diagonale.

81.

Lehrsätze. Die Anzahl der Ecken eines Polygons ist ebenso groß als die Anzahl seiner Seiten.

Von einem Ecke eines n-Eckes aus sind (n—3) Diagonalen möglich. Diese teilen das Polygon in (n—2) Dreiecke. Die Anzahl aller möglichen Diagonalen ist $\frac{n\,(n-3)}{2}$. Anzahl der Diagonalen.

82.

Lehrsatz. Die Summe aller Winkel eines n-Eckes ist (n—2) 2 R. Winkelsumme.

Beweis folgt entweder aus 81 und 41; oder für die Form n · 2 R — 4 R dadurch, daß man von einem beliebigen Punkte innerhalb des Polygons Strecken nach jedem Ecke zieht und 41, 26 Zus. 3 anwendet.

Lehrsätze. *α*) Die Summe der Außenwinkel eines Polygons ist 4 R.

β) Ein Polygon, welches nur konkave Winkel hat, kann höchstens drei spitze Winkel haben.

Beweis. Es läßt sich zeigen, daß bei Annahme von mehr als 3 spitzen Winkeln die mittlere Größe der übrigen Polygonswinkel mehr als 2 R beträgt.

83.

Erklärung. Ein Polygon heißt regulär, wenn es lauter gleich große Seiten und gleich große Winkel hat. Reguläre Polygone.

Beispiele. Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat sind reguläre Polygone.

Zusatz. Die Größe des Winkels eines regulären Polygons ist mit der Seitenzahl zugleich gegeben.

Aufgaben. Wie groß ist der Winkel des regulären Sechseckes, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, des Fünfecks, Zehnecks, Zwanzigecks, des Achtecks, Sechzehnecks und des Fünfzehnecks?

84.

Lehrsatz. Zwei Polygone (n-Ecke) sind kongruent, wenn (n—1) Seiten und die (n—2) von diesen Seiten gebildeten Winkel in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind wie im anderen. Kongruenzfälle der Polygone. I.

Beweis durch Aufeinanderlegen.

Anmerkung. Hier fehlte vorerst die Kenntnis von der Uebereinstimmung einer Seite und der zwei anliegenden Winkel. Vergl. 48.

85.

II. **Lehrsatz.** Die Kongruenz zweier Polygone (n-Ecke) ist erwiesen, sobald man erkannt hat, daß (n—2) aufeinanderfolgende Seiten und die (n—1) Winkel, deren Schenkel diese Seiten sind, in dem einen Polygon der Ordnung nach ebenso groß sind wie im andern.

Beweis durch Aufeinanderlegen.

Anmerkung. Man ist hier hinsichtlich der Uebereinstimmung zweier Seiten und des davon eingeschlossenen Winkels vorerst ungewiß und schließt aus der Uebereinstimmung der übrigen Stücke mit Sicherheit auf die Kongruenz. Vergl. 49.

86.

III. **Lehrsatz.** Zwei hohlwinklige Polygone sind kongruent, wenn alle Seiten und (n—3) auf einander folgende Winkel in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind, wie im anderen.

Beweis durch Aufeinanderlegen mit Berücksichtigung von 48 und 50.

87.

Zerlegung in kongruente Dreiecke.

Lehrsatz. Zwei kongruente Polygone werden durch Diagonalen, die von kongruenten Ecken*) ausgehen, in kongruente Dreiecke geteilt.

Beweis. Die Dreiecke decken einander zugleich mit den Polygonen.

Zusatz. Aus n Paaren kongruenter Dreiecke kann man zwei kongruente Polygone [(n + 2)-Ecke] zusammensetzen.

88.

Der Umfang eines Polygons und die Gerade.

Lehrsätze. a) Eine Gerade, die einen Punkt innerhalb einer ebenen Figur hat, schneidet den Umfang derselben in wenigstens zwei Punkten.

---

*) Kongruente Ecken sind solche, welche mit dem Polygon zugleich zur Deckung gebracht werden.

b) Liegen zwei ebene Figuren so, daß die eine einen Punkt ihres Umfanges innerhalb und einen Punkt ihres Umfanges außerhalb der anderen Figur hat, so schneiden sich die Begrenzungen der Figuren in wenigstens zwei Punkten. Zwei Perimeter der Lage nach.

Der Beweis dieser Sätze ergibt sich aus dem Begriffe der Figur als allseitig begrenzter Ebene: Jede Linie, welche von einem Punkte innerhalb nach einem Punkte außerhalb einer begrenzten Ebene gehen soll, muß die Grenze wenigstens einmal überschreiten.

c) Ist ein hohlwinkeliges Polygon A von einem anderen (beliebigen) Polygone B vollständig eingeschlossen, sei es, daß A Punkte oder einen Teil des Umfangs mit B gemeinschaftlich hat oder nicht, so ist der Umfang des Polygons A kleiner als der Umfang des Polygons B. der Größe nach verglichen.

Zum Beweise verlängere man die Seiten des Polygons A bis zum Umfange von B und wende wiederholt 15 an. Nach Addition der erhaltenen Ungleichungen fallen sämtliche Hilfslinien heraus, weil sie auf beiden Seiten vorkommen.

Man bemerkt, daß dieser Satz von der Seitenzahl des umschlossenen Polygons unabhängig ist.

VI. Abschnitt.

Vom Kreise.

89.

Erklärungen. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie begrenzt wird, in der alle Punkte von einem Punkte gleich weit entfernt sind.

Die Grenzlinie des Kreises heißt Peripherie (Kreislinie), ein Teil der Peripherie Bogen. Der Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleich weit abstehen, heißt Mittelpunkt (Centrum), die Entfernung des Mittelpunktes von einem Punkte der Peripherie Radius (Halbmesser).

Eine Strecke, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt im allgemeinen Sehne (Chorda). Geht die Sehne durch den Mittelpunkt des Kreises, so heißt sie Durchmesser (Dia-

meter). Verlängert man die Sehne, so erhält man eine Secante. Eine Gerade, welche nur einen Punkt mit dem Kreise gemeinschaftlich hat, heißt Tangente, der gemeinschaftliche Punkt heißt Berührungspunkt.

Ein Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpunkte hat, heißt Centriwinkel, ein Winkel, der seinen Scheitel in der Peripherie hat, und dessen Schenkel Sehnen sind, Peripheriewinkel. Ein Winkel, (dessen Scheitel in der Peripherie liegt und) der von einer Sehne und Tangente gebildet wird, heißt Tangentialwinkel.

Sektor oder Kreisausschnitt heißt jener Teil des Kreises, welcher von zwei Radien und einem Bogen begrenzt ist. Segment oder Kreisabschnitt heißt derjenige Teil des Kreises, welcher von einer Sehne und einem Bogen begrenzt wird. Jede Sehne teilt den Kreis in zwei Segmente.

90.

Konstruktion eines Kreises. Hält man den einen Endpunkt A einer Strecke AB fest und dreht die Strecke um diesen Punkt, so beschreibt der andere Endpunkt B eine Linie, welche mit A als Mittelpunkt und AB als Radius der eben gegebenen Definition der Peripherie entspricht, und vollendet man die Drehung bis zur ganzen Umdrehung, so erhält man eine (geschlossene) Figur, innerhalb welcher der Punkt A liegt.

91.

Die Peripherie als geometrischer Ort.

Lehrsatz. Es gibt weder außerhalb noch innerhalb des nach 90 konstruierten Kreises einen Punkt, welcher um AB von A entfernt ist.

Beweis. Verbindet man einen außerhalb liegenden Punkt mit dem Mittelpunkte durch eine gerade Linie, so schneidet diese die Peripherie (88) und ist größer als der Radius, weil dieser ein Teil von ihr ist, während die Strecke, welche einen innerhalb liegenden Punkt mit dem Mittelpunkte verbindet, verlängert werden muß, um dem Radius gleich zu werden.

Es enthält somit die durch obige Konstruktion erhaltene Peripherie alle Punkte der Ebene, welche von A die Entfernung

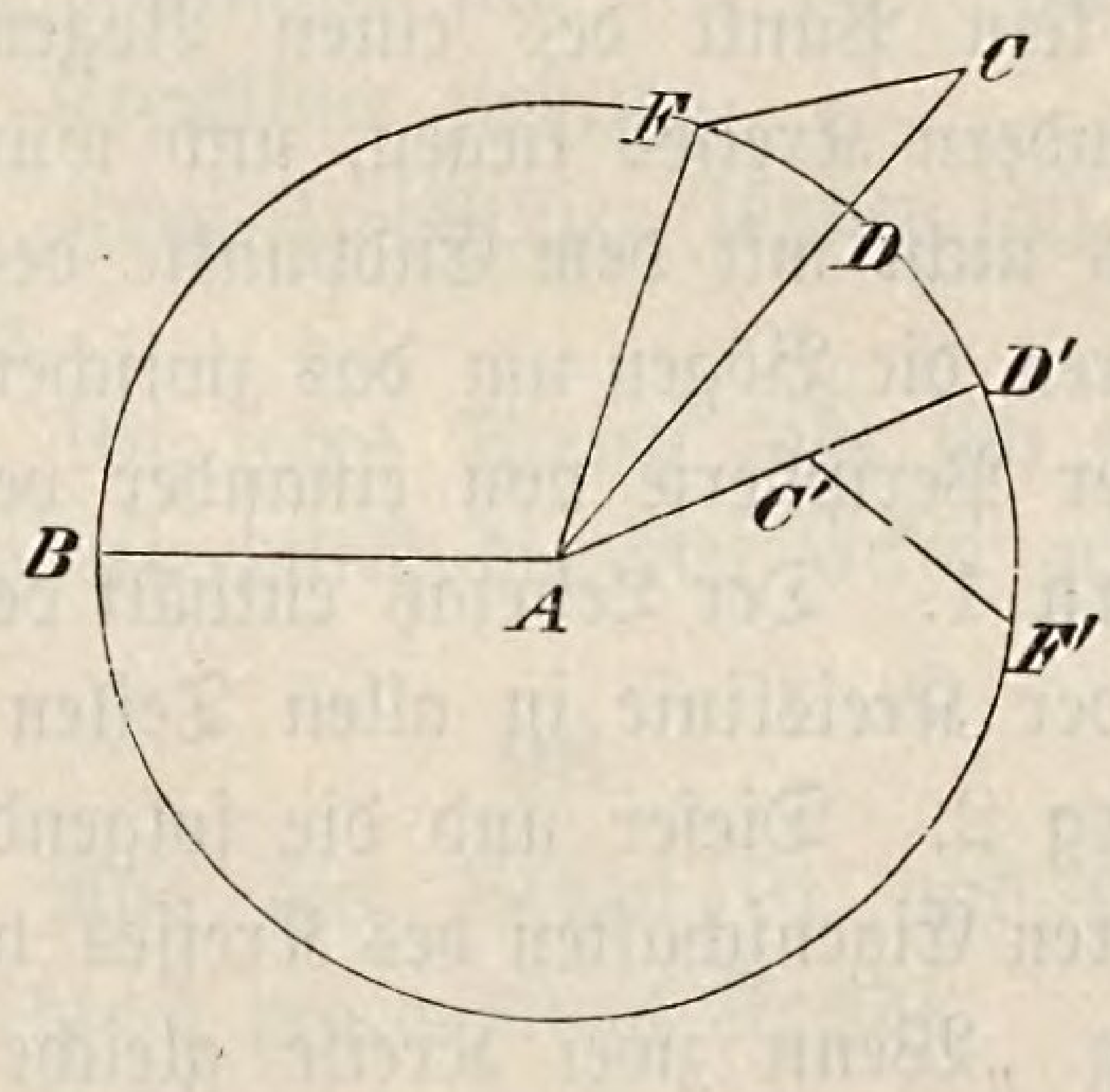
AB haben, und es gibt zu einem gegebenen Mittelpunkte und Radius nur eine Peripherie, oder:

Die Peripherie des mit AB um A beschriebenen Kreises ist der geometrische Ort aller Punkte, die von A um die Strecke AB abstehen.

92.

Lehrsatz. Es gibt (außer A) weder innerhalb noch außerhalb des durch obige Konstruktion (90) erhaltenen Kreises einen Punkt, der von allen Punkten der Peripherie gleichweit entfernt wäre. Mittelpunkt und Radius durch die Peripherie bestimmt.

Beweis. Es sei C irgend ein Punkt außerhalb des Kreises, so ziehe A C. Diese Strecke schneidet die Peripherie in D. Ferner sei F ein beliebiger Punkt in der Peripherie, ziehe A F und C F, so ist C F $>$ C D, d. h. der Punkt C hat ungleiche Entfernungen von den Punkten F und D der Peripherie.



Sei C' ein beliebiger Punkt innerhalb, so verlängere AC' bis zum Durchschnitte D' mit der Peripherie; ist dann F' ein beliebiger Punkt der Peripherie, so folgt C' D' $<$ C' F', d. h. der Punkt C' hat ungleiche Entfernungen von den Punkten D' und F' der Peripherie.

Somit ist der Punkt A, welcher der Konstruktion (90) gemäß innerhalb der beschriebenen Figur liegt, der einzige Punkt, von welchem alle Punkte der Peripherie gleichweit (um A B) entfernt sind, d. h. zu einer gegebenen Peripherie gibt es nur einen Mittelpunkt und Radius.

93.

Kongruenz zweier Kreise.

Lehrsatz. Der Kreis ist der Größe und der Form nach durch seinen Radius vollkommen bestimmt oder: zwei Kreise von gleichen Radien sind kongruent.

Beweis. Legt man die beiden Kreise mit ihren Mittelpunkten aufeinander, so müssen sich auch die Grenzen decken (91).

94.

Kongruenz gleicher Bögen

Lehrsatz. Gleich große Bögen, welche Kreisen von gleichen Radien angehören, sind kongruent.

Beweis. Nennt man diejenigen Grenzpunkte der beiden Bögen Anfangspunkte, von welchen aus die Bögen, vom Mittelpunkte aus betrachtet, sich nach der nämlichen Richtung hin erstrecken, so ist offenbar, daß man die beiden Kreise, denen die Bögen angehören, so zur Kongruenz bringen kann, daß zugleich die Anfangspunkte der Bögen zusammenfallen und die beiden Bögen von diesen aus nach derselben Seite hin liegen. Nun kann wegen 93 kein Punkt des einen Bogens außerhalb der Peripherie des andern Kreises liegen, und würde der Endpunkt des einen Bogens nicht mit dem Endpunkte des anderen zusammenfallen, so wären die Bögen um das zwischen den Endpunkten liegende Stück der Peripherie von einander verschieden.

Anmerkung 1. Der Lehrsatz enthält den wichtigen Satz, daß die Form der Kreislinie in allen Teilen dieselbe ist.

Anmerkung 2. Dieser und die folgenden Sätze, welche von den elementaren Eigenschaften des Kreises handeln, enthalten die Voraussetzung „Wenn zwei Kreise gleiche Radien haben". Sie gelten somit selbstverständlich auch für den Fall, daß die geometrischen Gebilde, von denen angenommen ist, daß sie in solchen Kreisen liegen, einem und demselben Kreise angehören.

95.

Der Kreis durch drei Punkte der Peripherie bestimmt.

Lehrsatz. Die Lage und der Halbmesser eines Kreises sind durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte, durch welche die Peripherie gehen soll, vollkommen bestimmt, oder:

Zwei Kreise, deren Peripherien durch drei gegebene, nicht in gerader Linie liegende Punkte gehen, können von einander nicht mehr unterschieden werden.

Beweis. Seien die drei Punkte A, B und C, so ist nach 54 der Durchschnittspunkt der senkrechten Halbierungslinien der Strecken AB und BC der einzige Punkt der Ebene, welcher von den drei Punkten A, B, C gleichweit entfernt ist. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt, seine Entfernung von A der Radius. Vergl. 54 Zus. 1.

Zusatz 1. Die Peripherie eines Kreises kann nicht durch drei in gerader Linie liegende Punkte gehen. Vergl. 54 Zusatz 2.

Zusatz 2. Eine Gerade schneidet einen Kreis in höchstens zwei Punkten. Vergl. 54 Zusatz 3.

Zusatz 3. Kein noch so kleiner Teil der Peripherie eines Kreises ist geradlinig.

Zusatz 4. Ein gegebener Kreisbogen kann nur einem einzigen Kreise angehören oder: Lage und Radius des Kreises sind durch einen beliebigen Bogen desselben bestimmt.

Zusatz 5. Von einem beliebigen (vom Mittelpunkte verschiedenen) Punkte aus lassen sich nur zwei gleich lange Strecken an eine gegebene Kreislinie ziehen.

Zusatz 6. Zwei Kreislinien können sich höchstens in zwei Punkten schneiden.

Zusatz 7. Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die drei Ecken geht.

96.

Lehrsätze. Aus den Sätzen 91 und 92 folgt für die Lage eines Punktes gegen einen Kreis: Lage eines Punktes gegen einen Kreis.

Ein Punkt liegt

a) innerhalb,

b) in der Peripherie,

c) außerhalb eines Kreises, wenn seine Entfernung vom Mittelpunkte

 a) kleiner,

 b) eben so groß,

 c) größer als der Radius ist; und umgekehrt.

Der kleinste und größte Abstand eines Punktes von der Peripherie eines Kreises liegt auf der Geraden, welche durch den Punkt und den Mittelpunkt geht. Vergl. 92.

97.

Lage einer Geraden gegen einen Kreis.

Mit Rücksicht auf 95 Zus. 2 kann eine Gerade mit einer Kreislinie

a) keinen,

b) einen,

c) zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

98.

Die Gerade trifft den Kreis nicht.

Lehrsätze. a) Die Gerade hat keinen Punkt mit der Kreislinie gemein, wenn die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte größer als der Radius ist (die Senkrechte ist die kürzeste, 96).

b) Hat eine Gerade keinen Punkt mit der Kreislinie gemein, so ist die vom Mittelpunkte auf die Gerade gefällte Senkrechte größer als der Radius.

c) Der kleinste und größte Abstand der Geraden von der Peripherie liegt auf der genannten Senkrechten, d. h. die Senkrechte enthält jene beiden Punkte der Peripherie, welche unter allen Punkten der Peripherie der Geraden am nächsten und am entferntesten liegen.

99.

Die Tangente.

Lehrsätze. a) Die Gerade hat nur einen Punkt mit der Kreislinie gemein (ist Tangente an den Kreis), wenn die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte dem Radius gleich ist.

b) Die Tangente steht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht.

Beweis zu b). Da dem Begriffe der Tangente gemäß alle übrigen Punkte dieser Geraden außerhalb des Kreises liegen, so ist (nach 96) der Radius die kleinste Linie, die vom Mittelpunkte nach der Tangente gezogen werden kann. 46 Zus. 3.

c) Die vom Mittelpunkte des Kreises auf die Tangente gefällte Senkrechte geht durch den Berührungspunkt.

Beweis indirekt.

d) Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Senkrechte geht durch den Kreismittelpunkt. Beweis indirekt.

Zusatz. Verbindet man mit den vorgetragenen Lehren den Satz 56 a, dem gemäß jedes Dreieck einen Punkt hat, der von seinen drei Seiten gleichweit absteht, so folgt, daß zu jedem Dreiecke ein Kreis beschrieben werden kann, den die drei Seiten des Dreiecks berühren. Man sagt von diesem Kreise: er ist dem Dreiecke eingeschrieben oder von dem Dreiecke: es ist um den Kreis beschrieben. Hingegen heißt ein Kreis, welcher eine Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der zwei anderen Seiten berührt, dem Dreiecke angeschrieben.

100.

Lehrsätze. a) Schneiden sich zwei Tangenten eines Kreises, so sind die Strecken zwischen dem Durchschnittspunkte und den Berührungspunkten einander gleich. 51 Zus. 2. Tangenten.

b) Sind die Seiten eines Vierecks Tangenten eines Kreises (ist das Viereck um den Kreis beschrieben, Tangentenviereck, so sind die beiden Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich groß. Beweis durch a.

c) Sind in einem Vierecke die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich, so läßt sich in dasselbe ein Kreis einschreiben, der die vier Seiten berührt.

Beweis. Man zeige, daß der Punkt, welcher von drei Seiten gleichweit absteht, den gleichen Abstand von der vierten Seite hat, indirekt durch 57 d Zusatz.

Zusatz. In jedes gleichseitige Viereck läßt sich ein Kreis einschreiben.

101.

Lehrsätze. a) Eine Gerade hat zwei Punkte mit einer Kreislinie gemein, wenn die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte kleiner ist als der Radius. Die Gerade schneidet den Kreis in zwei Punkten.

Beweis. Der Fußpunkt der Senkrechten liegt nach 96 innerhalb des Kreises. 88 a.

b) Hat eine Gerade zwei Punkte mit der Kreislinie gemein, so ist die vom Mittelpunkte auf sie gefällte Senkrechte kleiner als der Radius.

Ein indirekter Beweis hiefür liegt in 98 und 99, ein direkter in 37 und 46 Zusatz 2.

b) Ist von einer Geraden bekannt, daß sie einen Punkt mit einer Kreislinie gemein hat, und bildet sie mit dem an diesen Punkt gezogenen Radius schiefe Winkel, so hat die Gerade noch einen zweiten Punkt mit der Kreislinie gemeinschaftlich.

Beweis. Zieht man vom Mittelpunkte eine Senkrechte auf die Gerade, so ist diese kleiner als jede Schiefe, somit kleiner als der Radius.

d) Die Radien, welche nach den zwei Schnittpunkten einer Geraden mit einer Kreislinie (nach den Endpunkten einer Sehne) gezogen werden, stehen schief auf der Geraden.

Beweis durch 43 Zusatz 3.

Anmerkung. Von einer Geraden, welche die Peripherie in zwei Punkten schneidet, gehört eine Strecke dem Kreise als Sehne an.

102.

Die Sehne. **Lehrsätze.** a) Eine Senkrechte, die man vom Mittelpunkte des Kreises auf die Sehne fällt, halbiert die Sehne.

a) Eine Gerade, welche den Mittelpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkte der Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

c) Eine Gerade, welche die Sehne senkrecht halbiert, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

103.

Zwei Sehnen. **Lehrsätze.** Gleich lange Sehnen, welche Kreisen mit gleichen Radien angehören, haben gleiche Abstände von ihren Kreismittelpunkten; und umgekehrt.

104.

Lehrsätze. a) In Kreisen von gleichen Radien liegt die größere Sehne dem Mittelpunkte näher.

b) In Kreisen von gleichen Radien ist diejenige Sehne größer, welche den kleineren Abstand vom Mittelpunkte hat.

Beweise am leichtesten durch 57d Zusatz.

Zusatz. Der Durchmesser ist die größte Sehne. Beweis auch durch 15.

105.

Lehrsätze. Sind in Kreisen von gleichen Radien — Gegenseitige Abhängigkeit der Sehnen, Centriwinkel, Bögen, Sektoren u. Segmente.

a) zwei Sehnen gleich, so sind auch die zugehörigen Centriwinkel und Bögen, Sektoren und Segmente gleich (kongruent).

Beweis durch Kongruenz.

b) Sind zwei Centriwinkel gleich, so sind auch die zugehörigen Sehnen, Bögen, Sektoren und Segmente gleich (kongruent).

c) Sind zwei Bögen gleich, so sind auch die zugehörigen Sehnen, Centriwinkel, Sektoren und Segmente gleich (kongruent).

Beweis durch 94.

d) Sind zwei Sektoren oder Segmente gleich, so sind auch die zugehörigen Bögen, Sehnen und Centriwinkel gleich.

Beweis. Wären die Bögen ungleich, so könnte man die Kreise so auf einander legen, daß der kleinere Bogen als Teil des größern erscheint (94). Dann würde, wenn die zugehörigen Sehnen und Radien gezogen werden, auch die eine Fläche als Teil der anderen erscheinen, was gegen die Voraussetzung ist.

Zusatz 1. Dem Lehrsatze gemäß halbiert eine Gerade, welche den Centriwinkel halbiert, stets auch den Bogen; ferner teilt ein Radius, der den Bogen halbiert, auch den Centriwinkel in zwei gleiche Teile, und endlich geht nach 53a die Halbierungslinie des Centriwinkels durch die Mitte der Sehne und steht auf derselben senkrecht.

Somit ergibt sich der Satz:

Die Mittelpunkte des Kreises, der Sehne und des Bogens liegen in einer Geraden, welche auf der Sehne senkrecht steht.

Erfüllt eine Gerade zwei dieser vier Bedingungen, so erfüllt sie auch die übrigen, und es ergeben sich durch Specialisierung zunächst $\left(\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}=\right)$ sechs Sätze, deren Formulierung vorgenommen werden kann.

Außerdem wird der Centriwinkel von der so bestimmten

Geraden stets halbiert, und andererseits genügt die Halbierung des Centriwinkels (da sie die Erfüllung der ersten Bedingung in sich schließt) allein zur Bestimmung der Geraden.

Ferner folgt: Ist eine der oben genannten vier Bedingungen erfüllt, während man von einer zweiten weiß, daß sie nicht erfüllt ist, so ist auch keine der übrigen erfüllt.

Es kann also z. B. ein Strahl, der von der Mitte des Bogens aus nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, die Sehne nicht halbieren u. s. w.

Zusatz 2. Die Untersuchung über die gegenseitige Abhängigkeit des Radius, der Sehne, des Centriwinkels und des Bogens läßt sich noch dadurch weiter führen, daß man den Lehrsätzen in Nr. 105 negative Voraussetzungen zu Grunde legt, z. B.

Lehrsätze. 1) Sind in Kreisen von gleichen Radien zwei Sehnen ungleich, ($c_1 > c_2$), so gehört zu der kleineren Sehne der kleinere Centriwinkel.

2) Sind in Kreisen von ungleichen Radien ($r_1 > r_2$), zwei Sehnen gleich ($c_1 = c_2$), so sind die zugehörigen Centriwinkel ungleich, und zwar gehört der größere Centriwinkel dem kleineren Kreise an.

105a.

Lehrsätze. 1) Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier parallelen Sehnen steht auf denselben senkrecht (und geht durch den Mittelpunkt des Kreises). Die Umkehrungen dieses Satzes sind richtig.

2) Die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte paralleler Tangenten geht durch den Mittelpunkt des Kreises; und umgekehrt.

3) Ist die Tangente einer Sehne parallel, so geht die vom Berührungspunkte nach der Mitte der Sehne gezogene Gerade durch das Centrum (und steht auf beiden Geraden senkrecht).

Die Umkehrungen dieses Satzes sind richtig.

4) Zwischen zwei parallelen Sehnen oder Tangenten eines Kreises liegen zwei gleich große Bögen.

Ebenso sind die beiden Bögen gleich, welche zwischen dem Berührungspunkte einer Tangente und den Endpunkten einer ihr parallelen Sehne liegen.

Die Umkehrung dieses Satzes ist nur für die beiden letzten Fälle allgemein richtig.

5) Zwei Sehnen, welche nicht durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, können einander nicht halbieren.

6) Läßt man eine gegebene Strecke mit ihren Endpunkten auf den beiden Schenkeln eines rechten Winkels gleiten, so beschreibt der Mittelpunkt der Strecke einen Kreisbogen (Quadranten).

7) Ist ein Kreis einem Dreiecke angeschrieben, so ist die Summe zweier Dreiecksseiten und ihrer Verlängerungen bis zu den Berührungspunkten dem Umfange des Dreiecks gleich.

106.

Lehrsatz. In Kreisen von gleichen Radien verhalten sich die Bögen wie die zugehörigen Centriwinkel. Das Verhältnis der Bögen.

Beweis. a) Sind die Centriwinkel α_1 und α_2 kommensurabel, d. h. giebt es einen Winkel β, der in beiden ohne Rest enthalten ist (vergl. 17 Anm. 2), so kann man

$$\alpha_1 = x \cdot \beta,$$
$$\alpha_2 = y \cdot \beta$$

setzen, und es wird das Verhältnis der Centriwinkel

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{x}{y}.$$

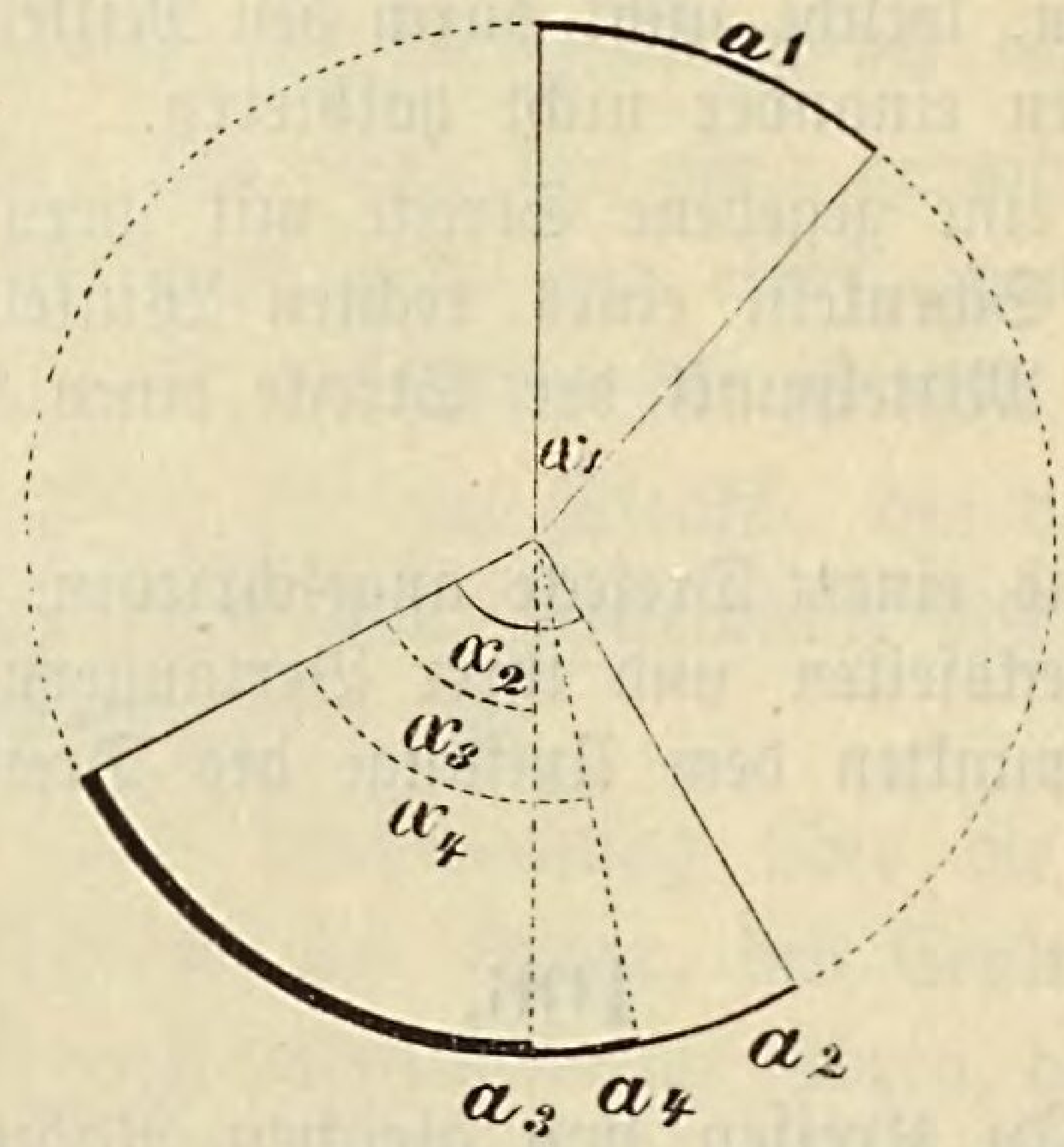
Denkt man sich nun den Winkel α_1 in x, den Winkel α_2 in y gleiche Teile von der Größe β geteilt, so wird (nach 105) bei gehöriger Länge der Teilungslinien auch der zugehörige Bogen a_1 in x, der Bogen a_2 in y gleiche Bögen geteilt, deren jeder die Länge b haben mag, und es ist,

$$a_1 = x\,b,$$
$$a_2 = y\,b,$$

folglich $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{x}{y},$$

und demnach $$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

b) Sind die Centriwinkel inkommensurabel, so kann auch in diesem Falle ihr Verhältnis von dem Verhältnisse der



Bögen nicht verschieden sein. Denn wäre dieses der Fall und beispielsweise

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{a_1}{a_2},$$

so könnte man die Gleichung dadurch wiederherstellen, daß man a_2 durch einen kleineren Bogen a_3 ersetzte, so daß also

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_3} \text{ und } a_3 < a_2$$

wäre, dieses ist aber unmöglich.

Teilt man nämlich a_1 (etwa durch fortgesetzte Halbierungen des Centriwinkels) in so kleine Teile, daß einer dieser Teile (b′) kleiner wird als $a_2 - a_3$, und trägt diese Teile auf a_2 ab, so fällt wenigstens ein Teilpunkt zwischen die Endpunkte von a_3 und a_2 und bildet den Endpunkt eines Bogens a_4 der größer als a_3 und kleiner als a_2 ist und mit a_1 ein gemeinschaftliches Maß (b′) hat, während der zugehörige Centriwinkel α_4 ebenfalls größer als α_3 und kleiner als α_2 ist. Es gilt nun dem in a) Bewiesenen gemäß

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = \frac{a_1}{a_4} \text{ oder } \frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_4}{a_4},\text{*)}$$

und der Hypothese gemäß

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_3} \text{ oder } \frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_2}{a_3}$$

*) Ueber arithmetische Umformung von Proportionen siehe Nr. 163.

daher $\frac{\alpha_4}{a_4} = \frac{\alpha_2}{a_3}$,

oder $\frac{\alpha_4}{\alpha_2} = \frac{a_4}{a_3}$, wobei links ein ächter, rechts ein unächter Bruch stünde. Die Hypothese ist folglich unmöglich.

Analog erledigt sich die Hypothese $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{a_1}{a_2}$, so daß auch hier nur $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1}{a_2}$ möglich bleibt.

Gradmaß des Bogens.

Zusatz 1. Gradmaß des Bogens. Denkt man sich um den Scheitel eines rechten Winkels, als Mittelpunkt, mit beliebigem Radius einen Kreis beschrieben und den rechten Winkel in Grade, Minuten, Sekunden geteilt, so schneiden die Teilungslinien ebenso viele gleiche Teile von dem Bogen ab, der den vierten Teil der Peripherie bildet und deshalb den Namen Quadrant erhalten hat.

Man ist nun übereingekommen, die Ausdrücke Grad, Minute, Sekunde ebensowohl auf $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{90.60}$, $\frac{1}{90.60.60}$ des Quadranten zu beziehen, wie sie gemäß 23 für die gleichen Bruchteile des rechten Winkels gelten.

Somit hat jeder Bogen ebenso viel Grade, Minuten, Sekunden, als der ihm zugehörige Centriwinkel. Die ganze Peripherie hat 360 Grade. In Kreisen von gleichen Radien sind Bögen, welche durch die nämliche Anzahl von Graden u. s. w. ausgedrückt werden, gleich lang; in Kreisen von verschiedenen Radien hingegen entsprechen der nämlichen Anzahl von Graden verschieden lange Bögen, d. h. die Länge des Bogengrades ist (in später zu ermittelnder Weise) von der Größe der Radius abhängig.

Längenmaß für den Winkel.

Zusatz 2. Absolutes Maß des Winkels. Denkt man sich um den Scheitel eines beliebigen Winkels (α), als Mittelpunkt, einen Kreis mit einem der Längeneinheit (Meter) gleichen Radius beschrieben, so liegt ein Bogen (von der Länge a) zwischen den Schenkeln des Winkels (α), welcher in folgendem Sinne als Maß des Winkels betrachtet werden kann.

1) Bezeichnet in diesem Kreise q die Länge des Quadranten, R die Größe des rechten Winkels, so ist dem Lehrsatze gemäß

$$\frac{\alpha}{R} = \frac{a}{q}$$

$$\text{oder } \sphericalangle\, \alpha = \frac{a}{q} R \ldots (1$$

d. h. der Winkel α hat so viele Rechte, als der Bogen a Quadranten enthält.

2) Unter allen möglichen Bögen wird einer der Längeneinheit vollständig gleich sein müssen. Der ihm zugehörige Centriwinkel sei m, so folgt aus (1

$$\sphericalangle\, m = \frac{1}{q} \cdot R$$

oder insoferne q die (absolute) Zahl bedeutet, welche angibt, wie oft die Längeneinheit in der Länge des (mit der Längeneinheit beschriebenen) Quadranten enthalten ist

$$\sphericalangle\, m = \frac{R}{q}$$

d. h. der zum Bogen 1 gehörige Centriwinkel ist der q^{te} Teil eines Rechten.

Führt man dieses in die Gleichung (1 ein, welche sich in der Form

$$\sphericalangle\, \alpha = a \frac{R}{q}$$

schreiben läßt, so folgt

$$\sphericalangle\, \alpha = a\, m.$$

Nimmt man nun, wie allgemein üblich ist, denjenigen Winkel zur **Einheit des Winkelmaßes**, welcher in dem mit der Längeneinheit beschriebenenen Kreise als Centriwinkel zu dem Bogen von der Länge Eins gehört, setzt man somit $m = 1$, so folgt in diesem neuen Winkelmaße

$$\sphericalangle\, \alpha = a$$

d. h. **der Winkel hat zum Maße die Anzahl der Längeneinheiten, welche der um seinen Scheitel mit der Längeneinheit beschriebene und von seinen Schenkeln begrenzte Bogen enthält.**

Anmerkung. Durch die Einführung dieses Maßes ist

der abstrakte Begriff der Umdrehung (21) auf den konkreten eines Kreisbogens von bestimmter Länge zurückgeführt, und die Größe jeder Drehung durch den Weg gemessen, den ein in der Entfernung Eins vom Drehpunkte liegender Punkt während der Drehung zurücklegt. Der Winkel kann nun in absolutem Maße ausgedrückt werden. Der Gradwert des oben mit m bezeichneten Winkels 1 ist $57^0\ 17'\ 44{,}8''$.

Aufgaben. Wenn die Zahl π ($= 3\frac{1}{7}$) die Länge des mit dem Radius 1 (Meter) beschriebenen Halbkreisbogens bezeichnet,

a) wie lang ist der Bogen, dessen Centriwinkel $1\ R;\ 2\ R;\ 3\ R;\ 4\ R;\ \frac{1}{2}\ R$ ist, $22\frac{1}{2}^0;\ 15^0;\ 275^0;\ 179^0\ 20';\ 0^0\ 15'\ 21'';\ 10^0\ 0'\ 2{,}3'';\ n^0\ a'\ b''$ hat?

b) Wie viele Rechte, wie viele Grade, Minuten, Sekunden hat der mit dem Radius 1 beschriebene Bogen (Winkel):

$$\pi;\ \frac{\pi}{4};\ 2\pi;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{3}{2}\pi;\ \frac{179}{180}\pi;\ 1{,}03\pi;\ 0{,}07\pi;\ \frac{a}{b}\pi?$$

107.

In den folgenden Paragraphen wird ein Maß für die auf den Kreis bezüglichen Winkel im Sinne von 106 Zusatz 1 festgestellt, indem der Bogen angegeben wird, der mit dem betreffenden Winkel gleich viel Grade hat. Kennt man das Verhältnis dieses Bogens zu dem bei derselben Drehung mit dem Radius Eins beschriebenen Bogen, so ist damit auch das absolute Maß des Winkels gefunden. Winkel im Kreise.

108.

Lehrsatz. Der Peripheriewinkel ist die Hälfte des Centriwinkels, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. Oder: Peripheriewinkel.

Der Peripheriewinkel hat zum Maße die Hälfte des Bogens, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

Der Beweis ergibt sich für den Fall, daß ein Schenkel durch den Mittelpunkt geht, aus 40 und 43; die übrigen Fälle werden durch eine Hilfslinie auf diesen zurückgeführt. Man beweise den Satz auch für stumpfe Peripheriewinkel!

Zusatz 1. Peripheriwinkel, die (in Kreisen von gleichen

Radien) auf gleich großen Bögen stehen, sind einander gleich; und umgekehrt.

Zusatz 2. Der Peripheriewinkel, der auf dem Durchmesser steht, ist ein Rechter.

Zusatz 3. Gehen zwei aufeinander senkrechte Sehnen von einem Punkte der Peripherie aus, so liegen ihre beiden anderen Endpunkte und der Kreismittelpunkt in einer Geraden. 26 Zus. 1.

Zusatz 4. Es gibt weder außerhalb noch innerhalb des um eine Strecke (als Durchmesser) beschriebenen Kreises einen Punkt, in welchem zwei von den Endpunkten dieser Strecke ausgehende Gerade sich rechtwinklig schneiden; somit ist die über der Strecke (als Durchmesser) beschriebene Kreislinie der geometrische Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, welche jene Strecke zur Hypotenuse und Grundlinie haben.

109.

Winkel des Sehnenvierecks.

Lehrsätze. a) Sind die Seiten eines Vierecks Sehnen eines Kreises (ist ein Viereck einem Kreise eingeschrieben, Sehnenviereck), so sind die gegenüberliegenden Winkel des Vierecks supplementär.

b) Sind zwei gegenüberliegende Winkel eines Vierecks supplementär, so läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die vier Ecken des Vierecks geht.

Beweis. Man beschreibe einen Kreis um drei Ecken und zeige, daß das vierte Eck weder innerhalb noch außerhalb des Kreises liegen kann. 40. 109 a.

c) Stehen über einer Strecke zwei gleich große Winkel so, daß die Scheitel der Winkel auf derselben Seite der durch die Strecke bestimmten Geraden liegen, so läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die beiden Endpunkte der Strecke und durch die Scheitel der beiden Winkel geht.

Beweis wie zu b.

Zusatz. Um jedes rechtwinklige Parallelogramm und um jedes Antiparallelogramm läßt sich ein Kreis beschreiben.

110.

Tangentialwinkel.

Lehrsätze. a) Der Tangentialwinkel (89 Abs. 4) ist dem Peripheriewinkel gleich, der auf der

Sehne steht. Oder: Der Tangentialwinkel hat die Hälfte des von der Sehne überspannten Bogens zum Maß.

Der Beweis wird zunächst für den spitzen Tangentialwinkel dadurch eingeleitet, daß man den Peripheriewinkel mit Rücksicht auf 99 b) konstruiert und dann 108 Zus. 2 anwendet.

Durch eine passende Konstruktion läßt sich auch unmittelbar zeigen, daß der Tangentialwinkel der Hälfte des Centriwinkels gleich ist, der auf der Sehne steht.

b) Bildet der von dem Endpunkte einer Sehne aus den Kreis verlassende Strahl mit der Sehne einen Winkel, welcher dem auf der Sehne stehenden Peripheriewinkel gleich ist, so gehört der Strahl einer Tangente an.

Beweis mittels der in a) angewandten Konstruktion.

111.

Lehrsatz. Denkt man sich zwei Strahlen, die von den Punkten A_1, B_1 der Peripherie ausgehen, und dieselbe zum zweiten Male in den Punkten A_2, beziehungsweise B_2 schneiden, so ist das Maß für den Winkel (α) der beiden Strahlen immer durch die Bögen $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ gegeben; und zwar ist dieses Maß die halbe Summe dieser beiden Bögen, wenn sich die Strahlen im Kreise schneiden, hingegen die halbe Differenz derselben, wenn der Schnittpunkt außerhalb des Kreises liegt. Der Satz gilt auch dann, wenn die 4 Punkte in 3 oder 2 zusammenfallen. Durch Specialisierung erhält man folgende Sätze:

a) Der Winkel zweier Sehnen hat zum Maße (d. h. ebenso viel Grade wie) die halbe Summe der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln und denen seines Scheitelwinkels liegen. Sehnenwinkel.

Beweis: Man verbinde die Endpunkte der Bögen durch eine dritte Sehne, und wende 40 und 108 Zus. 1 an.

b) Der dem Kreise zugekehrte Winkel, welchen zwei Sekanten mit einander bilden, hat zum Maße die halbe Differenz der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln liegen. Sekantenwinkel.

Beweis wie zu a).

c) Der dem Kreise zugekehrte Winkel, welchen eine Sekante mit einer Tangente bildet, hat zum Maße die halbe Differenz der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln liegen. Winkel der Sekante und Tangente.

Beweis durch 40 und 110 a.

Tangentenwinkel. d) Der dem Kreise zugewendete Winkel zweier Tangenten hat zum Maße die halbe Differenz der Bögen, die zwischen seinen Schenkeln liegen.

Anmerkung. In wiefern ist der Lehrsatz 108 ein besonderer Fall von 111?

112.

Lehrsätze. 1) Liegt der Scheitel eines Winkels (α) in dem Sektor des Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht (oder in der Grenze des Sektors), so ist der Winkel (α) größer, als der Centriwinkel. 40.

2) Liegt der Mittelpunkt des Kreises in oder zwischen den Schenkeln eines Winkels (α), der seinen Scheitel innerhalb des Kreises hat, so ist der Winkel (α) kleiner als der Centriwinkel und größer als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf gleichem Bogen steht. 40.

Zusatz. Ein Winkel, dessen Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, ist stumpf, wenn sein Scheitel innerhalb des Kreises, und spitz, wenn sein Scheitel außerhalb des Kreises liegt.

3*) Liegt der Scheitel eines Winkels (α) in dem Sektor des Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht, so liegt der Mittelpunkt des Kreises in der Winkelebene seines Scheitelwinkels (α'); und umgekehrt.

Beweis. Man bemerke zunächst, daß ein Punkt innerhalb einer Winkelebene liegt, wenn der vom Scheitel des Winkels durch den Punkt gezogene Strahl den Winkel teilt, d. h. mit jedem der Winkelschenkel einen kleineren Winkel bildet als der andere Schenkel, und umgekehrt.

Verbindet man nun den Mittelpunkt des Kreises mit dem Scheitel des Winkels (α), so teilt der Strahl der Voraussetzung gemäß den Centriwinkel, folglich auch den Bogen, daher den Winkel (α), weil der ganze Bogen, somit auch der Teilpunkt, zwischen dessen Schenkeln liegt. Somit teilt der entgegengesetzte Strahl den Scheitelwinkel (27). Es geht also eine Teilungslinie des Scheitelwinkels (α') durch den Mittelpunkt des Kreises, w. z. b. w. Die Umkehrung wird ebenso bewiesen.

Zwei sich schneidende Sehnen. 4*) Schneiden sich zwei Sehnen innerhalb eines Kreises in einem vom Mittelpunkte verschiedenen Punkte, so ist der Bogen b_1 zwischen den Schenkeln desjenigen Winkels (α), welcher den Mittelpunkt enthält, größer als der Bogen b_2 zwischen den Schenkeln seines Scheitelwinkels (α').

---

*) Die Lehrsätze 3) 4) 5) eignen sich nicht zu Aufgaben für Anfänger.

Beweis. Konstruiert man zu beiden Bögen die Centriwinkel C_1 und C_2, so ist $C_1 > \alpha$, also b_1 größer als das Bogenmaß des Winkels α; ferner $C_2 > \alpha'$, somit b_2 kleiner als das Bogenmaß des Winkels α'; nun ist $\alpha = \alpha'$ also haben diese Winkel den nämlichen Bogen zum Maße, folglich $b_1 > b_2$.

5*) Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise so, daß zwischen den Schenkeln je zweier Scheitelwinkel gleiche Bögen liegen, so ist der Schnittpunkt der Sehnen der Mittelpunkt des Kreises.

6) Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise (außerhalb des Mittelpunktes) so, daß zwischen den Schenkeln zweier Scheitelwinkel gleiche Bögen liegen, so sind die Sehnen gleich groß. 108. Zus. 1. 49.

7) Schneiden sich zwei gleiche Sehnen im Kreise, so liegen gleiche Bögen zwischen den Schenkeln derjenigen beiden Scheitelwinkel, deren Winkelebenen den Mittelpunkt nicht enthalten.

8) Schneiden sich ungleiche Sehnen im Kreise, so sind die gegenüberliegenden Bögen ungleich; und umgekehrt.

9) Stehen zwei Sehnen auf einander senkrecht, so ergänzen sich die zwischen zwei Scheitelwinkeln liegenden Bögen zum Halbkreise; und umgekehrt.

10) Stehen zwei gleiche Sehnen auf einander senkrecht, so liegt je ein Quadrant zwischen den Schenkeln der beiden Scheitelwinkel, die den Mittelpunkt des Kreises nicht enthalten.

11) Die Halbierungslinie des Winkels, den zwei gleiche Sehnen bilden, geht durch den Mittelpunkt des Kreises 50.

Der Satz bezieht sich offenbar nur auf denjenigen der vier Winkel, zwischen dessen Schenkeln der Mittelpunkt liegt, gilt übrigens für alle denkbaren Lagen des Sehnenschnittpunktes. Die Halbierungslinie der Supplemente dieses Winkels steht auf dem durch den Scheitel gezogenen Radius senkrecht.

12) Wird der Winkel zweier Sehnen von dem durch seinen Scheitel gezogenen Radius halbiert, so sind die Sehnen gleich groß.

13) Die Halbierungslinie des Winkels ungleicher Sehnen geht nicht durch den Mittelpunkt und umgekehrt.

14) Die Endpunkte gleicher Sehnen bestimmen im allgemeinen ein Antiparallelogramm, und zwar bilden die Sehnen

a) die zwei Diagonalen des Antiparallelogramms, wenn sie sich im Kreise schneiden,

b) zwei Seiten des Antiparallelogramms, wenn sich ihre Verlängerungen schneiden.

Schneiden sich die Sehnen in der Peripherie, so reduciert sich das Antiparallelogramm auf ein gleichschenkliges Dreieck.

Zusätze. 1) Verbindet man die Endpunkte zweier gleicher Sehnen, die sich innerhalb des Kreises schneiden, so erhält man vier Dreiecke, von welchen zwei gleichschenklig, die beiden andern kongruent sind.

2) Konvergieren zwei gleiche Sehnen, so sind ihre Verlängerungen bis zum Durchschnittspunkte gleich groß.

15) Sind zwei Sehnen gleich und parallel, so bestimmen ihre Endpunkte ein Rechteck.

16) Die Diagonalen des (in den Kreis) eingeschriebenen Rechtecks gehen durch den Mittelpunkt des Kreises.

Vermischte Uebungssätze.

17) Beschreibt man um ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis und verbindet die Ecken des Dreiecks mit einem beliebigen Punkte der Peripherie, so ist die mittlere der Verbindungsstrecken der Summe der äußeren gleich.

Zum Beweise trage man eine der äußeren Strecken auf der mittlern ab, dann folgt die Gleichheit des Restes mit der andern aus 51.

18) Beschreibt man um ein beliebiges Dreieck einen Kreis und fällt von einem Punkte der Peripherie Senkrechte auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die Fußpunkte dieser Senkrechten in einer Geraden. 26 Zus. 1. 108 Zus. 4. 109 b. 108 Zus. 1. 109 a.

19) Verbindet man die Fußpunkte der drei Höhen eines Dreiecks, so begrenzen die Verbindungsstrecken ein neues Dreieck, dessen Winkel durch jene drei Höhen halbiert sind.

Beweis. Man beschreibe Halbkreise über den Seiten des ursprünglichen Dreiecks und wende 108 Zus. 1 wiederholt an.

Gegenseitige Lage zweier Kreise.

113.

Lehrsatz. Aus den Sätzen 93 und 95 ergiebt sich, daß zwei Kreise, die den Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie oder 3 Punkte der Peripherie gemeinschaftlich haben, sich weder der Größe noch der Lage nach von einander unterscheiden.

114.

Erklärungen. Zwei Kreise, die den nämlichen Mittelpunkt haben, heißen koncentrisch, Kreise von verschiedenen Mittelpunkten excentrisch. Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier Kreise verbindet, heißt Centrallinie oder Centrale.

115.

Lehrsatz. Zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten, wenn die Centrale (AB) zugleich kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden Radien ($r_1 > r_2$) ist. Zwei Schnittpunkte.

Voraussetzung. $AB < (r_1 + r_2)$

$AB > (r_1 - r_2)$

Beweis. Man zeigt, 1) daß der Endpunkt von r_2 innerhalb des Kreises um A liegt ($AB - r_2 < r_1$); 2) daß der Endpunkt der um r_2 verlängerten Centrale außerhalb des Kreises um A liegt ($AB + r_2 > r_1$). 96. 88b.

116.

Lehrsatz. Ist die Centrale gleich der Summe der Radien, so berühren sich die Kreise von außen, d. h. sie haben nur einen Punkt ihrer Peripherien gemeinschaftlich, während alle übrigen Punkte des einen Kreises außerhalb des anderen liegen. Berührung von außen.

Beweis. Da $BA - r_1 = r_2$ ist, so liegt der um r_1 vom Mittelpunkte A entfernte Punkt der Centrale zugleich in der Peripherie des Kreises um B.

Jeder andere Punkt (C) der einen Kreislinie (um B) liegt außerhalb des andern Kreises, wie sich indirekt durch 15 und die Voraussetzung ergibt.

117.

Lehrsatz. Ist die Centrale gleich der Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von innen, d. h. sie haben nur einen Punkt der Peripherien gemeinschaftlich, während alle übrigen Punkte des einen Kreises innerhalb des andern liegen. Berührung von innen.

Beweis. Da $AB + r_2 = r_1$, so liegt der auf der Verlängerung der Centrale um r_2 von B entfernte Punkt zugleich

auf der Peripherie des Kreises um A. Jeder andere Punkt des Kreises um B liegt innerhalb des Kreises um A; denn nach 96 ist der als gemeinschaftlich nachgewiesene Punkt der beiden Kreise derjenige Punkt des Kreises um B, welcher von A am weitesten entfernt ist, und da diese Entfernung nur einen Radius (r_1) beträgt, so liegen die übrigen Punkte innerhalb des Kreises um A.

118.

Ausgeschlossene Lage.

Lehrsatz. Ist die Centrale größer als die Summe der Radien so liegt jeder Punkt des einen Kreises außerhalb des andern Kreises.

Zusatz. Die Differenz zwischen der Centrale und der Summe der Radien ($AB - (r_1 + r_2)$) ist der kleinste Abstand beider Kreise.

119.

Eingeschlossene Lage.

Lehrsatz. Ist die Centrale kleiner als die Differenz der Radien [$AB < (r_1 - r_2)$] so liegt jeder Punkt desjenigen Kreises, der den kleineren Radius hat, innerhalb des andern Kreises.

Beweis. Der von A am weitesten entfernte Punkt (der Endpunkt von $AB + r_2$) ist noch um weniger als einen Radius (r_1) von A entfernt.

Zusatz. Der kleinste Abstand der beiden Peripherien ist $r_1 - (AB + r_2)$, der größte Abstand $(BA + r_1) - r_2$.

Aufgabe. Um wieviel ist der größte Abstand der beiden Kreise größer als der kleinste?

120.

Der Berührungspunkt auf der Centrale.

Lehrsatz. Berühren sich zwei Kreise von außen (vergl. 116), so liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Beweis. Die Centrale muß beide Peripherien schneiden. Fielen diese Schnittpunkte nicht in einen zusammen, so wäre die Centrale um die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte größer oder kleiner als die Summe der Radien und wegen 118 und 115 Berührung ausgeschlossen.

121.

Lehrsatz. Berühren sich zwei Kreise von innen (vergl. 117), so liegt der Berührungspunkt in der Verlängerung der Centrale.

Beweis wie in 120 mittelst 119 und 115.

122.

Lehrsätze. 1) Die im Berührungspunkte zweier Kreise an den einen Kreis gezogene Tangente ist auch Tangente an den andern Kreis.

2) Haben zwei Kreise in einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte eine gemeinschaftliche Tangente, so berühren sich die Kreise in diesem Punkte.

3) Die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise steht auf der Centrale senkrecht und wird von derselben halbiert.

4) Zieht man von dem einen Durchschnittspunkte zweier Kreise aus die beiden Durchmesser, so liegen die Endpunkte dieser Durchmesser mit dem zweiten Durchschnittspunkte der Kreise in einer Geraden.

5) Beschreibt man um einen Punkt A der Peripherie des Kreises 1 einen zweiten Kreis und zieht durch denselben Punkt A im ersten Kreise einen Durchmesser AB, so werden alle nach B hin gerichteten Sehnen des zweiten Kreises von der Peripherie des ersten Kreises halbiert. 108 Zus. 2.

Anhang I.

Konstruktionen.

123.

Allgemeines über Konstruktionsaufgaben. 1) Die Ausführung der folgenden Aufgaben setzt voraus, daß man um einen gegebenen (oder beliebigen) Punkt mit gegebenem (oder beliebigem) Radius einen Kreis beschreiben und eine gerade Linie ziehen kann, sei es, daß diese durch 2 gegebene Punkte gehen, oder die Verlängerung einer schon gezogenen geraden Linie bilden soll. Ausführung der Konstruktionen.

Es läßt sich diese Voraussetzung mit Zirkel und Lineal allerdings mit Annäherung erfüllen, man vergesse indessen nicht, daß auch die Konstruktionen Kopf-, nicht Handarbeit sind, daß

somit die Aufgabe als geometrische vollkommen gelöst ist, sobald sie auf die obigen beiden Voraussetzungen zurückgeführt d. h. angegeben ist, um welche Punkte, mit welchen Radien Kreise beschrieben, welche geraden Linien gezogen oder verlängert werden sollen. Eine möglichst genäherte Ausführung der Zeichnung kann indessen aus mancherlei Gründen sehr nützlich sein.

Unlösbare Aufgaben.

2) Eine Aufgabe ist im allgemeinen *unlösbar*, wenn die Erfüllung der gestellten Forderungen mit einem Satze der Geometrie in Widerspruch steht.

Dahin gehören insbesondere *überbestimmte* Aufgaben, d. h. solche, bei welchen mehr Forderungen gestellt sind, als zugleich erfüllt werden können, so daß einer oder einigen derselben, wenn sie nicht von der Art sind, daß sie durch Erfüllung der übrigen ohne unser Zuthun, infolge einer Beziehung zwischen den gegebenen Größen miterfüllt sind, nicht genügt werden kann. Z. B. Man soll durch eine Senkrechte, welche von einem Ecke des gegebenen Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gezogen wird, diese halbieren.

Bei jeder in bestimmten Maßzahlen gestellten Aufgabe kann man unbedingt über die Lösbarkeit entscheiden.

Determination.

Ist die Aufgabe aber, wie gewöhnlich, nicht in bestimmten Maßzahlen, sondern allgemein gestellt, so hat sie in der Regel eine *Determination*, d. h. sie ist nur dann lösbar, wenn die allgemeinen Angaben selbst gewisse Bedingungen erfüllen (sich innerhalb gewisser Grenzen halten).

Beispiele:

a) Ein Dreieck zu konstruieren, welches 3 gegebene Strecken zu Seiten hat.

b) In einer gegebenen Geraden 2 Punkte zu finden, die von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben.

Die Determination, an sich eine vortreffliche Uebung, ist zur Vervollständigung des Beweises unerläßlich.

Eindeutige, mehrdeutige, unbestimmte Aufgaben.

3) Die *lösbaren Aufgaben* sind durch die gestellten Anforderungen

a) *eindeutig bestimmt*, wenn sie nur eine Lösung haben, d. h. wenn nur *ein Endresultat* allen ge-

stellten Ansprüchen genügt. Verschiedene Wege zu diesem einzigen Ziele sind nicht ausgeschlossen.

b) mehrdeutig bestimmt, wenn sie mehrere Lösungen haben, d. h. wenn mehrere nicht kongruente geometrische Gebilde allen gestellten Anforderungen genügen.

Beispiel: Ein Dreieck zu konstruieren, welches zwei gegebene Strecken als Seiten und einen gegebenen Winkel so enthalten soll, daß er der kleineren von diesen Seiten gegenüberliegt.

c) unbestimmt oder unendlich vieldeutig, wenn sie unendlich viele Lösungen zulassen. Z. B. Ein Dreieck von gegebener Grundlinie und Höhe zu konstruieren.

Die Lösung solcher Aufgaben führt auf geometrische Oerter.

4) Die folgenden Aufgaben sind in drei Abteilungen zusammengestellt. Abteilung der Aufgaben.

Die erste Abteilung enthält „Fundamentale Aufgaben", deren Lösungen so geläufig werden sollen, wie die Lehrsätze selbst, da sie die elementare Grundlage dieses Zweiges der Geometrie bilden und die unentbehrlichen Hilfsmittel für alle übrigen Ausführungen bieten.

Daran reihen sich „Geometrische Oerter"' deren Wichtigkeit in demselben Sinne betont werden darf.

Endlich folgen „Uebungsaufgaben" denen ein Versuch zu einer allgemeinen Anleitung und zur weiteren Erläuterung die Lösung einiger Aufgaben vorausgeschickt ist.

Die Konstruktionsaufgaben sind mit fortlaufenden Nummern versehen, welche zur Unterscheidung von den übrigen mit einem vorgesetzten C citiert werden.

Erste Abteilung.

124.

Gleichschenklige und gleichseitige Dreieck.

Fundamentale Aufgaben. 1. Ueber einer als Grundlinie gegebenen Strecke

a) ein gleichschenkliges,

b) ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren ($\frac{2}{3}$ R zu konstruieren).

Lösung. Man beschreibe

a) mit einem Radius, welcher länger ist als die Hälfte der gegebenen Strecke,

b) mit der Strecke selbst

aus jedem der beiden Endpunkte der Strecke einen Kreis; der Schnittpunkt der beiden Kreise ist die Spitze des verlangten Dreiecks.

Halbierung einer Strecke.

2. Eine gegebene Strecke (durch eine Senkrechte) **zu halbieren,** wenn

a) auf beiden Seiten,

b) nur auf einer Seite der Strecke Raum zur Ausführung ist.

Lösung durch zwei gleichschenklige Dreiecke.

Senkrechte.

3. In einem gegebenen Punkte einer Geraden eine Senkrechte zu errichten.

Lösungen.

a) Durch ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der gegebene Punkt die Mitte der Grundlinie ist.

b) Durch ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem der gegebene Punkt Endpunkt der Grundlinie ist. Der eine Schenkel wird über die Spitze hinaus um seine eigene Länge verlängert und der Endpunkt der Verlängerung mit dem gegebenen Punkte verbunden. 78_1

c) Man beschreibe um einen Punkt, der nicht in der gegebenen Geraden liegt, eine Kreislinie, die durch den gegebenen Punkt geht; durch ihren zweiten Schnittpunkt mit der Geraden ziehe man einen Durchmesser und verbinde den gegebenen Punkt mit dessen anderem Endpunkte. 108 Zus. 2.

Zusatz. Zu einem gegebenen Winkel das Komplement zu konstruieren.

4. Von einem gegebenen Punkte aus auf eine gegebene Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Lösungen:

a) Durch zwei gleichschenklige Dreiecke, von deren einem der gegebene Punkt die Spitze ist, und deren gemeinschaftliche Grundlinie in der Geraden liegt.

b) Durch die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise.

c) Ziehe von dem Punkte nach der Geraden eine beliebige Schiefe, beschreibe um diese als Durchmesser einen Kreis, und verbinde den zweiten Schnittpunkt des Kreises und der Geraden mit dem gegebenen Punkte. 108 Zus. 2.

Zusatz. Zu einem gegebenen Winkel den supplementären Winkel zu konstruieren, so daß er

a) den nämlichen,

b) einen beliebigen Punkt als Scheitel hat. 59 β.

5. Einen gegebenen Winkel zu halbieren. Halbierung eines Winkels.

Lösung. Durch zwei gleichschenklige Dreiecke, deren gemeinschaftliche Basis die zu dem gegebenen Winkel gehörige Sehne ist.

Zusatz. Durch Lösung dieser Aufgabe ist man im Stande $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{4}R$; $\frac{1}{3}R$, $\frac{1}{6}R$; $\frac{1}{2^n}R$, $\frac{1}{3.2^n}R$ zu konstruieren. Die Dreiteilung des rechten Winkels kann auch durch C 1 b allein gemacht werden.

Die Hälfte eines gegebenen Winkels wird am einfachsten dadurch konstruiert, daß man um seinen Scheitel einen Kreis beschreibt, und über den zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen einen Peripheriewinkel stellt.

6. Einen gegebenen Winkel so zu zeichnen, daß ein gegebener Punkt sein Scheitel und ein gegebener Strahl der eine Schenkel wird. Antragen eines gegebenen Winkels.

Lösung. Sowohl um den Scheitel des gegebenen Winkels als um den neuen Scheitel beschreibe mit demselben Radius eine

Kreislinie, und trage die zum gegebenen Winkel gehörige Sehne vom Schnittpunkte des Strahles aus ab. Vgl. auch C 4 Z.

Zusatz.

a) Die Summe,

b) Die Differenz zweier gegebener Winkel zu konstruieren.

Parallele.

7. Durch einen gegebenen Punkt (A) **zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu konstruieren.**

Lösungen.

a) Man verbinde den Punkt (A) mit der Geraden durch eine beliebige Schiefe und wende (mit Rücksicht auf 30 Z.) C 6 an,

b) durch C 4 und C 3,

c) durch Konstruktion eines Parallelogramms. Nachdem die Verbindungslinie (AB) wie in a) gezogen ist, schneide man vom Schnittpunkte (B) derselben aus eine beliebige Strecke BC (welche auch der AB gleich sein kann) auf der Geraden ab, beschreibe um A mit BC, um C mit BA einen Kreis, so ist die Verbindungsstrecke des Schnittpunktes beider Kreise mit A die verlangte Parallele. (Einfachste Art.)

Zusatz. Aus zwei gegebenen Strecken und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu konstruieren.

Teilung einer Strecke in n gleiche Teile.

8. Eine gegebene Strecke in n gleiche Teile zu teilen.

Lösung. Man setze einen beliebigen Strahl an den einen Endpunkt der Strecke, trage auf diesem n Strecken von beliebiger aber gleicher Länge (a) auf, verbinde den zweiten Endpunkt der Strecke (na) mit dem zweiten Endpunkte der gegebenen Strecke und ziehe zu dieser Verbindungslinie durch alle Teilpunkte der Strecke (an) Parallele.

Beweis in 75 Zus. 2.

Dreieck.

9. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

a) Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;

b) Eine Seite und die zwei anliegenden Winkel;

c) Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel;

d) Die drei Seiten;

e) Zwei Seiten und der Winkel, welcher der größeren gegenüberliegt;

f) Zwei Seiten und der Winkel, welcher der kleineren gegenüberliegt. (Zweideutig.)

10. **Einen Kreis zu beschreiben,** der durch 3 gegebene Punkte geht. Kreis.

Lösung durch 54.

11. **An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen,** welche Tangente.

a) durch einen in der Peripherie,

b) durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt geht.

Lösungen.

Zu a). Man errichte im Endpunkte des Radius durch eines der in C 3 angegebenen Verfahren eine Senkrechte.

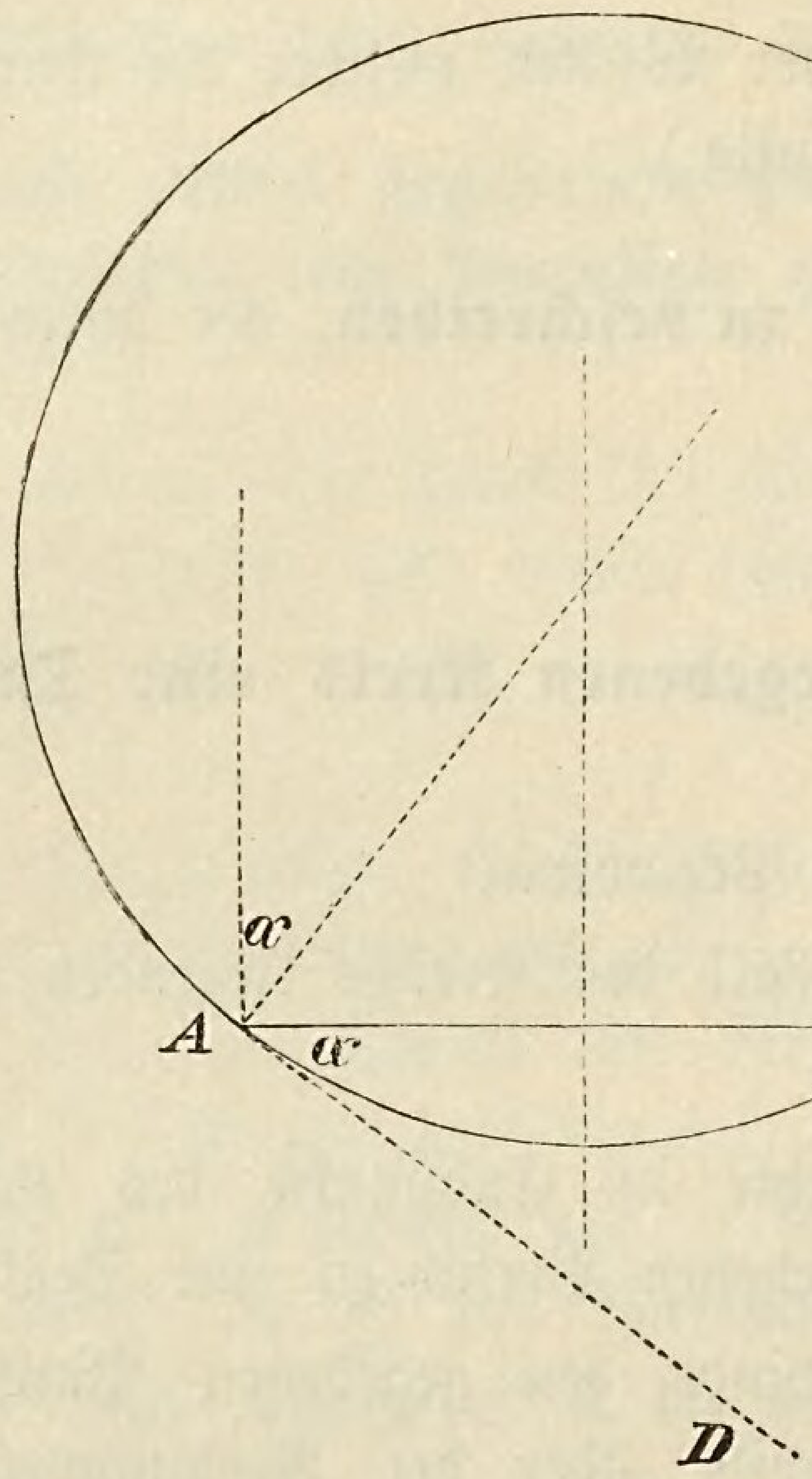
Zu b). Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte und beschreibe über der Verbindungsstrecke als Durchmesser einen Kreis. Die beiden Durchschnittspunkte der Kreislinien sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten, die von dem gegebenen Punkte aus an den Kreis gezogen werden können.

12. **Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Sehne (AB) so enthält, daß der auf dieser Sehne stehende Peripheriewinkel eine gegebene Größe (α) hat.** Gegebener Winkel einer gegebenen Strecke gegenüber.

Lösungen. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises muß zunächst in der senkrechten Halbierungslinie der gegebenen Sehne liegen.

a) Trägt man den gegebenen Winkel (α) an den einen Endpunkt (A) der Sehne so an, daß diese den einen Schenkel bildet, so besitzt nach 110 der Peripheriewinkel die verlangte Größe in einem Kreise, an welchem der

zweite Schenkel (AD) des aufgetragenen Winkels Tangente ist. Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichtete Senkrechte geht aber ebenfalls durch den Mittelpunkt.



Man errichte demnach auf dem zweiten Schenkel im Punkte A eine Senkrechte. Der Schnittpunkt derselben mit der senkrechten Halbierungslinie der Sehne ist der Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

b) Man errichte in A eine zweite Senkrechte auf AB und ziehe eine Gerade, welche mit dieser den gegebenen Winkel α bildet. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der senkrechten Halbierungslinie ist der gesuchte Mittelpunkt.
Beweis durch 32 Z. und 108.

12a). In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Größe und Richtung einzutragen.

Lösung. Man ziehe einen Durchmesser der gegebenen Richtung parallel, schneide auf demselben zu beiden Seiten des Mittelpunktes Strecken ab gleich der Hälfte der gegebenen Sehne und ziehe durch die Schnittpunkte Senkrechte zum Durchmesser.

Man erhält dann die Grenzen für zwei Sehnen, welche der Aufgabe genügen.

Zweite Abteilung.

125.

Geometrische Örter. Den geometrischen Ort aller Punkte zu konstruieren,

13. welche mit zwei gegebenen Punkten in gerader Linie liegen;

14. welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Entfernungen haben;

15. welche von einer Geraden um eine gegebene Länge abstehen;

16. welche von zwei gegebenen Geraden gleich weit abstehen, wenn diese Geraden

a) parallel sind,

b) konvergieren;

17. welche von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleich weit abstehen;

18. welche von einem Punkte um eine gegebene Länge entfernt sind;

19. welche von der Peripherie eines Kreises um eine gegebene Länge abstehen;

19a. welche in einem gegebenen Kreise die Sehnen von bestimmter Länge halbieren;

20. welche von einem gegebenen Strahle ebensoweit abstehen, als ihre Projektion vom Anfangspunkte des Strahles entfernt ist;

21. welche von einem gegebenen Strahle halb so weit entfernt sind, als vom Anfangspunkte desselben.

Die Lösung ist ein Strahl, welcher mit dem gegebenen einen Winkel von 30° bildet.

Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu suchen,

22. welche mit gegebenem Halbmesser beschrieben sind, und durch einen gegebenen Punkt gehen;

23. welche durch zwei gegebene Punkte gehen;

24. welche eine der Lage nach gegebene Strecke als Sehne fassen;

25. welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und ein der Größe nach gegebenes Stück einer gegebenen Geraden als Sehne fassen; (derselbe ist eine zur gegeb. Ger. Parallele.)

26. welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berühren;

27. welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und eine gegebene Grade berühren.

Den geometrischen Ort aller Punkte zu konstruieren,

28. welche Scheitel eines rechten Winkels sind, dessen Schenkel durch die Endpunkte einer gegebenen Strecke gehen;

29. welche Scheitel eines Winkels von gegebener Größe sind, dessen Schenkel eine gegebene Gerade in 2 gegebenen Punkten schneiden [109];

30. welche Scheitel eines Winkels von gegebener Größe sind, dessen Schenkel einen gegebenen Kreis berühren;

31. welche Schnittpunkte zweier Geraden sind, die einen gegebenen Kreis berühren und zwischen dem Schnittpunkte und Berührungspunkte eine vorgeschriebene Länge haben.

Die Lösung ist ein konzentrischer Kreis.

Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise zu konstruieren,

32. welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren;

33. welche mit gegebenem Halbmesser beschrieben sind und einen gegebenen Kreis

a) von außen,

b) von innen berühren;

34. welche, mit gegebenem Radius beschrieben, den Umfang eines gegebenen Kreises halbieren;

35. welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und mit einem gegebenen Kreise eine Sehne von gegebener Länge gemeinschaftlich haben;

36. welche von zwei parallelen Geraden Sehnen von gegebener Länge (a, b) abschneiden. 105a. 1). 54.

Der gesuchte Ort ist eine dritte Parallele, welche gefunden wird aus der Erwägung, daß die Gerade, welche die Mittelpunkte paralleler Sehnen verbindet, auf diesen senkrecht steht.

Dritte Abteilung.

126.

Allgemeine Anleitung zur Lösung von Konstruktions-Aufgaben.

Man kann zwei Verfahren unterscheiden, ein direktes oder synthetisches und ein indirektes oder analytisches.

1. Das direkte oder synthetische Verfahren gründet sich erstens auf die Erkenntnis, daß die Lösung jeder Aufgabe davon abhängt, die Lage gewisser Punkte zu bestimmen, und zweitens auf die Möglichkeit für einen solchen entscheidenden Punkt zwei geometrische Örter (Gerade oder Kreise) nachzuweisen, als deren Schnittpunkt er dann (eindeutig oder zweideutig) bestimmt ist.

Beispiel. Man soll das Dreieck konstruieren, von welchem eine Seite (a) der gegenüberliegende Winkel (A) und die zu a gehörige Höhe (h_a) gegeben sind.

Die Lösung ist gefunden, wenn die Lage der Spitze A gegen die Grundlinie a bestimmt ist. Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke, in welchem der Grundlinie a der Winkel A gegenüberliegen soll, ist der Kreisbogen, der den Peripheriewinkel A über der Sehne a enthält (C 12). Ferner ist der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche die Grundlinie a und die Höhe h_a haben, die im Abstande h_a zu a gezogene Parallele. Somit ergibt sich die Spitze A als Schnittpunkt dieser Parallelen mit einem Kreise, und man erhält im allgemeinen zwei (kongruente, symmetrisch in der Ebene liegende) Dreiecke, welche der Aufgabe genügen. Als Determination findet man für jeden gegebenen Winkel A einen größten Wert von h_a.

2. Das indirekte oder analytische Verfahren (Geometrische Analyse, Heuristik) geht von einer fingierten Lösung der Aufgabe

aus, d. h. von einer provisorischen Figur, welcher man alle Eigenschaften des verlangten geometrischen Gebildes zuschreibt.

In möglichst engem und beziehungsreichem Anschlusse an diese fertig gedachte Lösung sucht man die gegebenen Bestimmungsstücke durch solche Konstruktionen herzustellen, deren Ausführung bereits bekannt ist.

Ist dieses gelungen, so hat man jedenfalls eine Art möglicher Verbindung zwischen dem Gegebenen und Gesuchten dadurch hergestellt, daß man einen Weg vom Gesuchten zum Gegebenen, also zunächst einen Rückweg gefunden hat. Es erübrigt, einen sicheren Hinweg zu ermitteln.

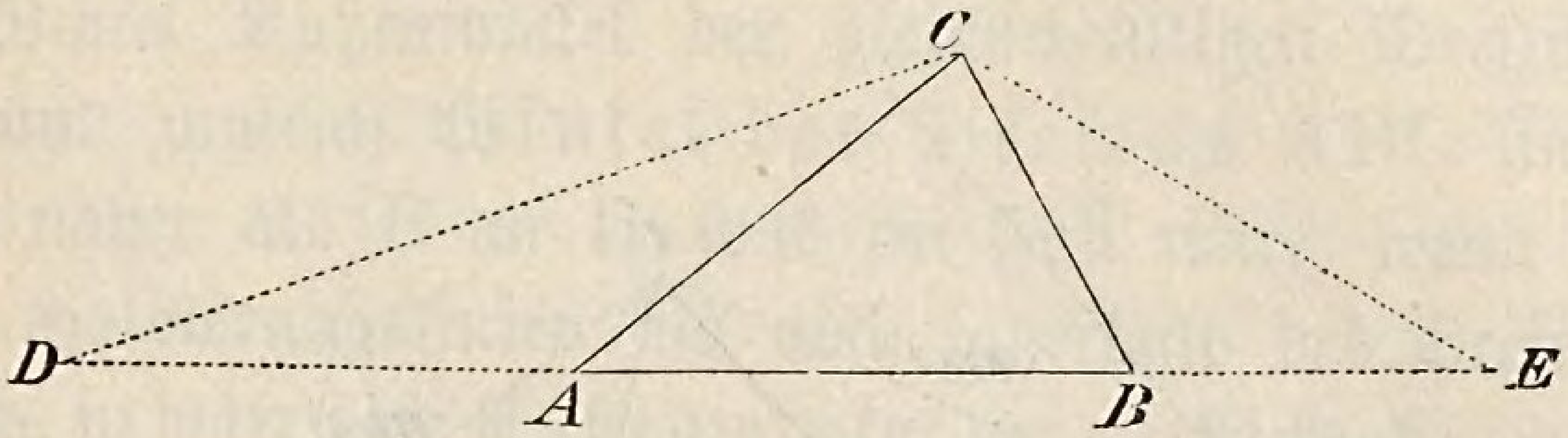
Zu diesem Zwecke suche man durch Anwendung geometrischer Lehrsätze auf das in der Zeichnung dargestellte Gebilde feste Beziehungen zwischen den gegebenen Größen und den gesuchten oder Bestimmungsstücken der gesuchten Größen; bedenke indessen dabei, daß nicht nur die ausdrücklich erwähnten Stücke gegeben sind, sondern auch alle jene Größen, die durch die erwähnten mitbestimmt sind. [Ist z. B. ein Punkt und ein Winkel gegeben, so ist die Länge der Senkrechten bekannt, die von dem Punkte aus nach den Schenkeln des Winkels gezogen werden, die Verbindungsstrecke des Punktes mit dem Scheitel u. s. w.]

Hat man solche Beziehungen gefunden, die zur Bestimmung des Gesuchten durch das Gegebene vollkommen ausreichen, so beginne man (der größeren Sicherheit wegen am besten an einer neuen Zeichnung) in Gedanken oder mit Lineal und Zirkel die Konstruktion selbst, indem man nun von den gegebenen Größen ausgeht.

Bei Konstruktion von Figuren, welche eine größere Anzahl von Bestimmungsstücken haben, trifft es sich, daß die gegebenen Stücke zwar in der Figur enthalten, aber in solcher Weise verteilt sind, daß die Art ihres Zusammenhanges nicht sofort erkannt wird. In solchen Fällen gelingt die Analyse in der Regel dadurch, daß man die gegebenen Stücke durch Konstruktionen, welche von der fertig gedachten Figur ausgehen, in eine einfachere, durch die gegebenen Stücke bestimmte Figur zusammenträgt. Vgl. die Aufgaben über Trapezoide § 134.

127.

Beispiel 1. Es soll ein Dreieck konstruiert werden, von welchem der Umfang (als Strecke a) und zwei Winkel (α und β) gegeben sind.



Anleitung zur Analyse. Man zeichne (aus freier Hand) irgend ein Dreieck ABC und nehme an, sein Umfang (AB + BC + CA) sei der gegebenen Strecke a gleich, $\sphericalangle$ A $= \alpha$ $\sphericalangle$ B $= \beta$.

Da der Umfang in Form einer Strecke (a) gegeben ist, so suche man denselben in dieser Form herzustellen, und lege deshalb AC in die Verlängerung von BA, BC in die Verlängerung von AB, so ist ED = a.

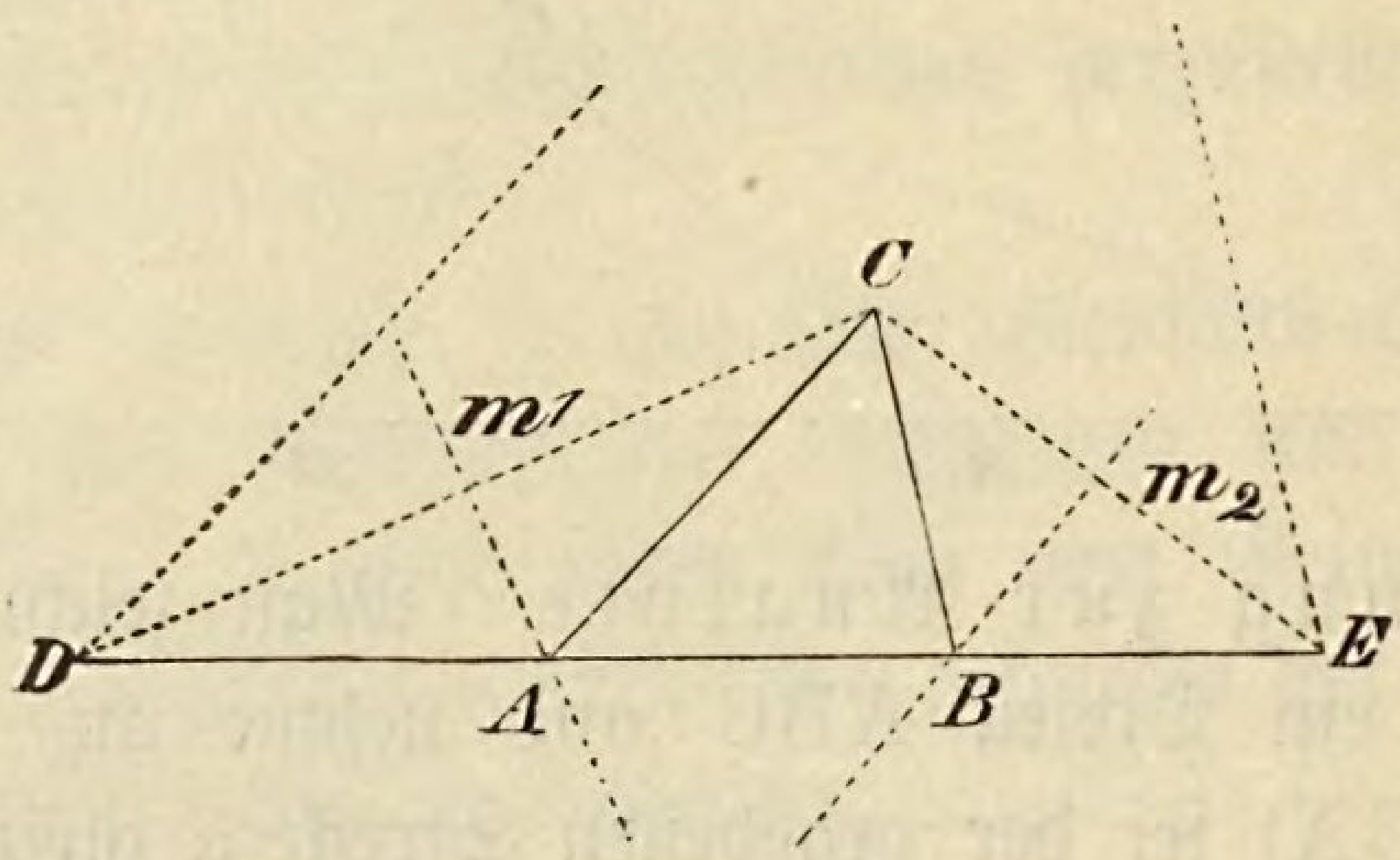
Diese Art der Herstellung von a hat das Eigentümliche, daß sie die zwei gleichschenkligen Dreiecke DAC und EBC liefert, und darf deshalb als „beziehungsreicher" angesehen werden, wie eine andere Abwickelung des Umfangs.

Nun erkennt man einerseits, daß die Winkel dieser beiden gleichschenkligen Dreiecke bekannt sind, da die Winkel an den Ecken A und B Nebenwinkel der beiden gegebenen Winkel sind, und daß insbesondere $\sphericalangle$ D $= \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle$ E $= \frac{1}{2}\beta$ ist, andererseits, daß der Endpunkt C des gesuchten Dreiecks zugleich Eckpunkt des nun völlig bestimmten Dreiecks DEC ist. Dasselbe wird durch C 6, C 5 erhalten.

Für die beiden anderen Endpunkte A, B kann die Erwägung maßgebend sein, daß sie Spitzen gleichschenkliger Dreiecke sein sollen, die über den bekannten Grundlinien CD und CE stehen, und daß sie zugleich in der Geraden DE liegen müssen. Sie sind folglich die Schnittpunkte der senkrechten Halbierungslinien von CD und CE mit dem Umfange.

Konstruktion. Man mache die Strecke DE = a, trage an D (als Scheitel) den gegebenen Winkel α, an E auf derselben Seite von ED den gegebenen Winkel β an, halbiere beide Winkel

und verlängere die Halbierungslinien bis zu ihrem Durchschnittspunkte (C). Halbiere die Strecke DC und EC durch Senkrechte. Diese schneiden die DE in den Punkten A und B. Ziehe die Strecken AC, BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.



Beweis. Zu beweisen ist:

1) Die Voraussetzung der Konstruktion, daß der Schnittpunkt C existiert, sowie daß die Schnittpunkte A und B vorhanden sind und auf der Strecke DE liegen.

2) Daß ein Winkel des Dreiecks ABC die Größe α, ein anderer die Größe β hat.

3) Daß $AB + BC + CA = a$ ist.

Zu 1) Da $\alpha + \beta < 2\,R$ (Determination), so ist umsomehr $\frac{\alpha + \beta}{2} < 2\,R$ und die Geraden DC und EC schneiden sich auf der Seite der Geraden DE, auf welcher die Winkel angetragen wurden.

$$\text{Da } \alpha > 2\,R,\ \frac{\alpha}{2} < R,$$

$$\text{so ist } \sphericalangle\, Am_1\, D + m_1\, DA < 2\,R;$$

$$\text{und wegen } \frac{\beta}{2} < R$$

$$\sphericalangle\, Bm_2\, E + m_2\, EB < 2\,R;$$

also sind auch die Schnittpunkte A und B erwiesen.

Es wäre aber denkbar, daß der Schnittpunkt A über E hinaus, der Schnittpunkt B über D hinaus fällt, so daß nicht die Strecke DE sondern CE (bez. CD) zunächst von der senkrechten Halbierungslinie getroffen werden. Dieses ist ausgeschlossen, weil (wegen $\frac{\alpha + \beta}{2} < R \sphericalangle$), m_1 CE stumpf ist, deshalb CE und

m_1 A rechts von Cm_1 divergieren, und folglich der zweite Schnittpunkt nicht in CE liegen kann. Analoges gilt für B.

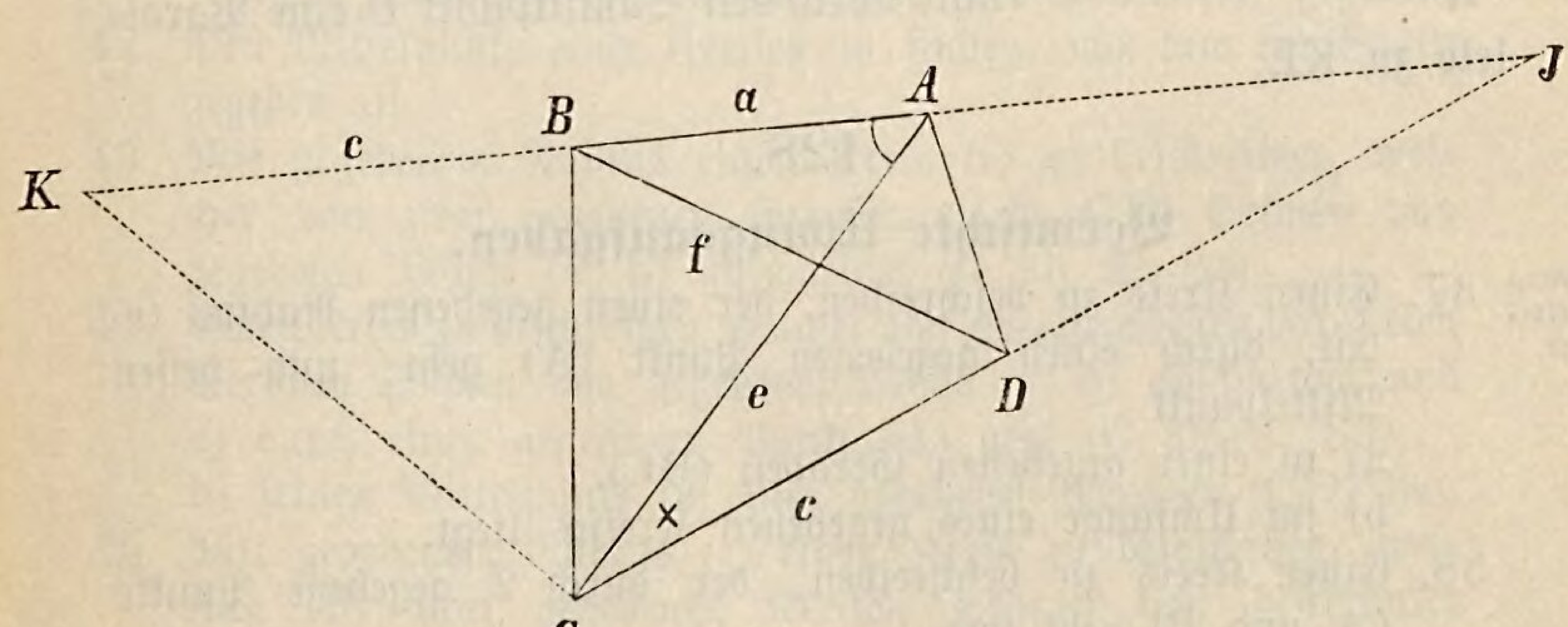
Zu 2). Wenn B näher als A an E liegt, so hat der Beweis $\sphericalangle$ ABC $= \beta$, $\sphericalangle$ BAC $= \alpha$ keine Schwierigkeit, weil diese Winkel Außenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke BEC, ADC und zugleich Winkel des Dreiecks ABC sind. Läge aber A näher als B an E, was der Fall wäre, wenn die senkrechten Halbierungslinien sich noch innerhalb des Dreiecks CED schnitten, so wären die Außenwinkel der gleichschenkligen Dreiecke, also unsere Winkel α und β, nicht Winkel des Dreiecks ABC, sondern dieses hätte die Nebenwinkel von α und β zu Winkeln. Ebendeshalb aber ist diese Lage der Punkte A und B unmöglich; denn da $\alpha + \beta < 2$ R, so ist die Summe ihrer Nebenwinkel größer als 2 R, folglich können diese nicht zugleich Winkel eines Dreiecks sein.

Zu 3).

$$\begin{array}{r} AB = AB \\ BC = BE \\ CA = AD \\ \hline AB + BC + CA = AB + BE + AD = DE = a. \end{array}$$

Die Determination $\alpha + \beta < 2$ R ist schon beim Beweise als wesentlich erkannt worden.

Beispiel 2. Ein Trapezoid zu konstruieren, von welchem

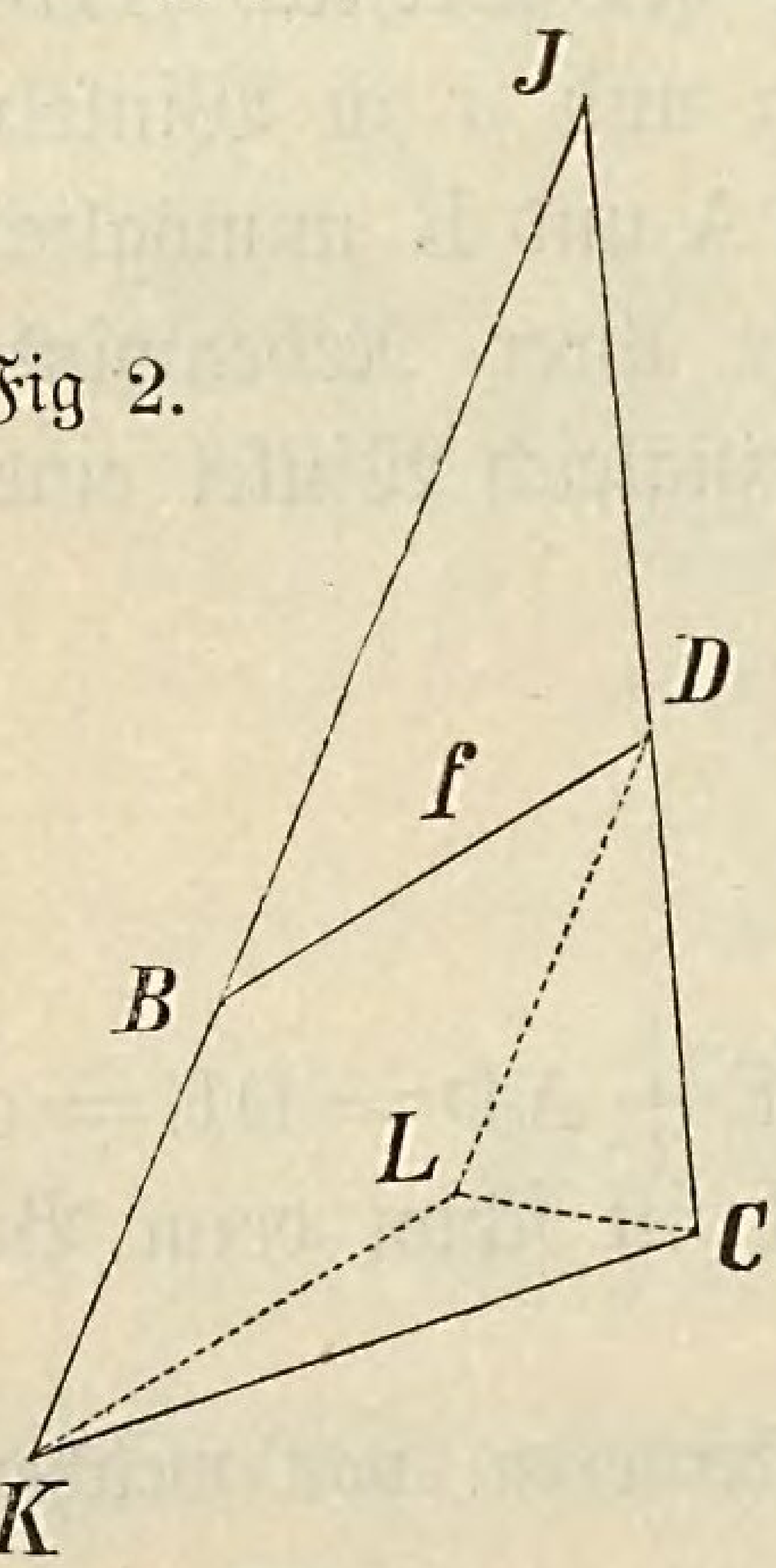


gegeben sind die beiden Diagonalen (e, f), die Summe (a + c) zweier gegenüberliegender Seiten, ferner der Winkel, den die Seite a mit der Diagonale e bildet ($\sphericalangle$ ea) und die Summe (B + C) der zwischen den Seiten a und c liegenden Winkel.

Lösung. Es sei ABCD (Fig. 1) das verlangte Trapezoid, so

stellt man das gegebene $(a+c)$ her, indem man AB um $BK = c$ verlängert denkt. Dadurch entsteht das Dreieck AKC, welches man aus e, $(a+c)$ und $\sphericalangle\,(ea)$ konstruieren kann. Denkt man sich ferner die Konvergenten BA und CD bis zu ihrem Schnittpunkte I verlängert, so entsteht an e das Dreieck CAI, dessen Winkel bekannt sind, welches sich also ebenfalls konstruieren läßt. Nun hat man noch die Diagonale f in das Dreieck KIC so einzutragen, daß sie von der Grundlinie aus gleiche Stücke abschneidet. Auf diese einfachere Aufgabe ist somit die vorliegende zurückgeführt.

Fig 2.



Behufs Lösung derselben zeichne man eine neue Figur, das Dreieck IKC (Fig. 2), in welches $BD = f$ so eingetragen sein soll, daß $BK = DC$. Analysis. Um die beiden gleichen Stücke in ein Dreieck zusammenzubringen, zieht man DL $\stackrel{=}{\|}$ BK, dann LC und LK. So ist das Dreieck LKC bestimmt, da $\sphericalangle\, DCL = R - \frac{I}{2}$, KC gegeben, $KL = BD = f$ ist. (C. 9. f.) Durch denjenigen der (2) gefundenen Punkte L, der innerhalb IKC liegt, ziehe man eine Parallele zu KI, und durch den Schnittpunkt D eine Parallele zu KL.

128.

Vermischte Übungsaufgaben.

Zur Einübung der geometrischen Örter.

37. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Radius (r) hat, durch einen gegebenen Punkt (A) geht, und dessen Mittelpunkt
    a) in einer gegebenen Geraden (BC),
    b) im Umfange eines gegebenen Kreises liegt.

38. Einen Kreis zu beschreiben, der durch 2 gegebene Punkte (A und B) geht und
    a) einen gegebenen Radius (r) hat,
    b) seinen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden (CD) hat,
    c) seinen Mittelpunkt im Umfange eines gegebenen Kreises hat.

39. Um einen gegebenen Mittelpunkt (A) einen Kreis zu beschreiben, der von einer gegebenen Geraden (BC) eine Sehne von gegebener Länge (l) abschneidet.

40. Mit gegebenem Radius (r) einen Kreis zu beschreiben,
   a) der durch einen gegebenen Punkt (A) geht und von einer gegebenen Geraden (BC) eine Sehne von gegebener Länge (l) abschneidet [C 25 S. 78];
   b) der von einer gegebenen Geraden (AB) eine Sehne von gegebener Länge (l) abschneidet, und dessen Mittelpunkt
      α) in einer gegebenen Geraden (CD),
      β) in der Peripherie eines gegebenen Kreises liegt.

41. In einem gegebenen Kreise (Mittelpunkt A, Radius r) eine Sehne zu ziehen,
   a) welche von einem gegebenen Punkte (B) der Peripherie ausgeht und einen vorgeschriebenen Abstand (a) vom Mittelpunkte hat;
   b) welche durch einen innerhalb des Kreises gegebenen Punkt (J) geht und in diesem Punkte halbiert wird;
   c) welche unter allen durch einen gegebenen Punkt (J) gehenden Sehnen die kleinste ist;
   d) welche durch einen Punkt (J) innerhalb des Kreises geht und eine vorgeschriebene Größe (b) hat [C 19a];
   e) welche eine bestimmte Größe (b) und Richtung hat (letztere ist etwa dadurch gegeben, daß sie einer gegebenen Geraden parallel laufen, auf derselben senkrecht stehen oder einen andern gegebenen Winkel mit ihr bilden soll);
   f) welche von einer schon gezogenen Sehne (BC) halbiert wird und mit dieser einen vorgeschriebenen Winkel bildet. Lösung: Durch die Richtung der Sehne ist auch die Richtung ihrer senkrechten Halbierungslinie (des Apothema) gegeben.

42. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, von dem ein Bogen gegeben ist.

43. Mit gegebenem Radius einen Kreis (r) zu beschreiben, welcher von zwei gegebenen Geraden (AB, CD) Sehnen von gegebener Länge (a, b) abschneidet (C 25 S. 82).

44. Einen Kreis zu beschreiben, welcher von zwei gegebenen parallelen Geraden Sehnen von gegebener Länge (a, b) abschneidet und
   a) durch einen gegebenen Punkt (A) geht (C 36 S. 83),
   b) seinen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden (CD) hat.

45. Mit gegebenem Radius (r) einen Kreis zu beschreiben, welcher mit zwei gegebenen Kreisen Sehnen von bestimmter Länge gemeinschaftlich hat. (C 35 S. 82.)

46. Die gemeinschaftliche Spitze zweier gleichschenkliger Dreiecke zu finden, deren Grundlinien zwei gegebene Strecken sind.

47. Durch einen gegebenen Punkt (A) eine Gerade so zu ziehen, daß sie gleiche Stücke von den Schenkeln eines gegebenen Winkels (BCD) abschneidet. Gemischte Methode.

48. Ein Winkel und ein Punkt sind gegeben; man soll durch diesen eine Gerade so ziehen, daß sie mit den Schenkeln gleiche Winkel bildet.

49. Man soll einen Punkt finden, der von zwei gegebenen Geraden die vorgeschriebenen Entfernungen a und b hat.

50. Man soll durch einen gegebenen Punkt (A) eine Gerade so ziehen, daß sie von zwei anderen gegebenen Punkten (B, C) gleichen Abstand hat.

(Zwei Lösungen. Die eine durch 61 Zus. 2. Analyse der zweiten durch 49.)

51. Eine Gerade (AB) und zwei Punkte (C, D) außerhalb derselben sind gegeben; man soll in der Geraden einen Punkt finden, der so liegt, daß die von ihm nach den zwei gegebenen Punkten gezogenen Strecken mit der gegebenen Geraden gleiche Winkel bilden.

Lösung. Liegen die Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden, dann ist eine Lösung durch Scheitelwinkel gegeben. Der zweite Punkt wird mit Hilfe der Lehre vom gleichschenkligen Dreieck gefunden (54). Die Art der Konstruktion paßt dann auch auf den Fall, wo die beiden Punkte auf derselben Seite der Geraden liegen.

52. In einem Dreiecke soll zu einer Seite eine Parallele so gezogen werden, daß die Summe der dieser Seite anliegenden Abschnitte gleich der gezogenen Parallelen wird. 65b.

53. In einer Seite eines Dreiecks ist ein Punkt gegeben; man soll durch ihn eine Transversale so ziehen, daß sie der Summe derjenigen zwei von ihr gemachten Abschnitte gleich wird, welche der nicht geschnittenen Seite anliegen.

Lösung. Der zweite Endpunkt der Transversale wird als Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks gefunden.

54. Die beiden Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks über die Grundlinie hinaus so zu verlängern, daß die Verbindungslinie der Endpunkte jeder der beiden Verlängerungen gleich wird.

55. Man soll durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so ziehen, daß sie mit zwei gegebenen Geraden, deren Verlängerung bis zum Durchschnitte unmöglich ist, gleiche Winkel bildet.

56. Die Halbierungslinie des Winkels zu finden, den zwei konvergente Strecken bilden.

Lösung. a) Man konstruiere den Winkel durch C 7 und analysiere durch 53.

b) Durch 56a verschafft man sich zwei Punkte der verlangten Geraden. Welchen Vorzug hat diese zweite Lösung vor der unter a) angedeuteten?

57. In einer Seite eines Dreiecks einen Punkt zu finden, der von den beiden andern Seiten gleich weit absteht.
58. Einen Punkt zu finden, der von drei gegebenen Geraden gleich weit absteht.
58a. Auf einer von zwei konvergenten Geraden ist ein Punkt (A) gegeben. Man soll auf derselben Geraden einen zweiten Punkt B so bestimmen, daß er ebenso weit von A als von der zweiten Geraden absteht.
59. Auf einer Seite (BC) eines Dreiecks (BCD) ist ein Punkt (A) gegeben; man soll in der Verlängerung einer zweiten Seite (BD) einen Punkt X so bestimmen, daß die Strecke (AX) zur Hälfte im Dreiecke und zur Hälfte außerhalb desselben liegt. Analyse durch Lehrsätze.
60. Durch einen innerhalb einer gegebenen Winkelebene liegenden Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß das von den Schenkeln begrenzte Stück derselben
    a) durch den gegebenen Punkt halbiert wird (61 d);
    b) einem Schenkelabschnitte gleich wird.
61. Durch einen außerhalb einer gegebenen Winkelebene liegenden Punkt eine Strecke nach dem einen Schenkel so zu ziehen, daß sie von dem andern Schenkel halbiert wird.
62. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß das Stück derselben, welches von zwei gegebenen Parallelen begrenzt wird, eine vorgeschriebene Länge erhält. 61 c.
63. Eine gegebene Strecke zwischen die Schenkel eines gegebenen Winkels so zu legen, daß sie mit einem Schenkel einen gegebenen Winkel bildet (einer gegebenen Geraden || läuft).
63a. In ein gegebenes Dreieck eine Strecke von gegebener Länge (l) so einzutragen, daß sie gleich große Stücke,
    α) von der Spitze aus,
    β) von der Grundlinie aus gemessen,
    abschneidet.
    Analyse zu β) durch ein Parallelogramm.
64. Drei gegebene Strecken so zusammenzustellen, daß sie von einem Punkte auslaufen, während ihre anderen Endpunkte in einer Geraden liegen und auf dieser zwei gleich lange Strecken begrenzen. 61 d.
65. Man soll einen Punkt im Umfange eines gegebenen Dreiecks so bestimmen, daß die durch ihn gezogenen, den Seiten parallelen Transversalen einander gleich werden. 65.
66. Von zwei unbekannten Winkeln ist die Summe ($= \sphericalangle\, \alpha$) und die Differenz ($= \sphericalangle\, \beta$) bekannt, die Winkel sollen durch Konstruktion gefunden werden.

Konstruktion von Dreiecken.

129.

Rechtwinklige Dreiecke.

Rechtwinklige Dreiecke. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, wenn gegeben sind:

67. Die Hypotenuse und eine Kathete;
68. Eine Kathete und die zur Hypotenuse gehörige Höhe;
69. Die Hypotenuse und die zu ihr gehörige Höhe (108, Zus. 2);
70. Eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und der anderen Kathete (127);
71. Die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten (127);
72. Eine Kathete und die Differenz der Hypotenuse und der anderen Kathete (53);
73. Die Hypotenuse und die Differenz der beiden Katheten;
74. Ein spitzer Winkel und eine Kathete;

74a. Ein spitzer Winkel und die Hypotenuse;

75. Ein spitzer Winkel und die Summe der Hypotenuse und einer Kathete (127);
76. Ein spitzer Winkel und die Differenz der Hypotenuse und einer Kathete;
77. Ein spitzer Winkel und die Summe der beiden Katheten;
78. Ein spitzer Winkel und die Differenz der beiden Katheten;
79. Ein spitzer Winkel und der Umfang.

130.

Gleichschenklige Dreiecke. Das gleichschenklige Dreieck ist gegeben, wenn eines der rechtwinkligen Dreiecke bekannt ist, welches von einer Höhe des gleichschenkligen abgeschnitten wird.

Demnach lassen sich die Konstruktionsaufgaben über gleichschenklige Dreiecke auf Konstruktionen von rechtwinkligen Dreiecken zurückführen. Man versuche dies an den folgenden drei Aufgaben.

Gleichschenklige Dreiecke.

Es soll ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert werden, wenn gegeben sind:

80. Der Schenkel und die dazu gehörige Höhe;
81. Der Schenkel und die Summe der anliegenden Winkel;
82. Der Umfang und der Winkel an der Spitze.

Man versuche, durch Uebertragung der Aufgaben 67—79 auf das gleichschenklige Dreieck, weitere Aufgaben zu formulieren!

Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben ist: Gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke.

83. Die zur Hypotenuse gehörige Höhe;

84. Der Umfang;

85. Die Differenz zwischen der Summe der Katheten und der Hypotenuse $[(k_1 + k_2) - h]$.

Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben ist: Gleichseitige Dreiecke.

86. Der Umfang;

86a. Die Höhe.

87. Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, dessen Ecken in drei gegebenen parallelen Geraden liegen.

Lösung. Man denke sich um das Dreieck einen Kreis beschrieben. 108 Zus. 1.

131.

Allgemeine Dreiecke. In einem Dreiecke seien a, b, c die Seiten, A, B, C die denselben gegenüberliegenden Winkel, h_a, h_b, h_c die zu ihnen gehörigen Höhen, m_a, m_b, m_c die von den Ecken nach den Mittelpunkten der Seiten (a, b, c) gezogenen Transversalen, w_a, w_b, w_c die Halbierungslinien der Winkel A, B, C, $y > x$ die Projektionen der Seiten b und c auf a. Unter einem Zeichen wie $\sphericalangle (m_a\, b)$ ist der Winkel verstanden, den die Richtungen der Strecken m_a und b mit einander bilden.

Das Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind: Allgemeine Dreiecke.

88. $(a + b)$, c, B

89. $(a + b)$, c, C (zwei Lösungen)

90. $(a + b)$, c, A

91. $(a + b)$, A, B

92. $(a - b)$, c, B*)

---

*) Bei denjenigen Aufgaben, in welchen die Differenz zweier Seiten gegeben ist, beachte man, daß behufs Analyse diese Differenz auf zweierlei Art hergestellt werden kann, durch Verkürzung der längeren und durch Verlängerung der kürzeren Seite.

93. (a — b), c, C
94. (a — b), c, A (bei der Analysis darf A nicht geteilt werden.)
95. (a — b), A, B
96. (a + b + c), A, B
97. (a + b — c), A, C [43 Zus. 2]
98. (a — b), C, (A — B)
99. a (A + B — C), (A — B + C)

*100. (a + b), c, (A — B) [In dem durch die Analyse ausgebildeten Dreieck, welches die Seiten (a + b) und c enthält, kann ein Winkel (nach 41) berechnet werden.]

*101 (a — b), c, (A — B) [In dem Dreieck, welches (a — b) und c enthält, kann ein Winkel bestimmt werden.]

---

102. a, b, h_a
103. a, h_a, B
104. a, h_a, h_b
105. a, h_b, A (C 12.)
106. a, h_b, B
107. h_a, h_c, C (99)
108. a, h_b, h_c (99)

109. (b + c) A, h_b
110. (b + c), B, h_a
111. (b + c), B, h_c
112. (b — c), A, h_b
113. (b — c), B, h_a (Zwei Lösungen.)
114. (b — c), C, h_a
115. (b — c), C, h_b

116. $(b - c)$, a, h_c
117. $(b + c)$, a h_b
118. $(b - c)$, a h_b

119. a, h_b, $(B - C)$
120. c, h_a, $(A - C$ [$\sphericalangle B$ gibt $(A + C)$]
121. b, h_a, $(B - C)$
122. b, h_c, $(B - C)$ [$\sphericalangle A$ gibt $(B + C)$]
123 $(a + b + c)$ h_a, B

124. a, $(b + h_a)$, C (Vgl. C 75)
125. a, $(b - h_a)$, C

126. x, y, h_a
127. x, y, b
129. x, y, B
128. x, y, h_b
130. x, b, h_a
131. x, b, c
132. x, b, B
133. x, b, C
134. x, c, C
135. x, c, A
136. x, h_b, C
137. x, h_b, B
138. x, h_b, A
139. x, h_b, c
140. x, h_a, h_b

141. y, $(b - c)$, C
142. y, $(a - c)$, C [54]
143. y, $(a + b + c)$, C
144. $(x + h_a)$, c, A (Analyse durch Verlängerung von h_a)
145. $(x + h_a)$, b, B

146. $(x + h_a)$, b, C
147. $(x + h_a)$, B, C

148. $(h_a - x)$, c, A
149. $(h_a - x)$, c, C
150. $(h_a - x)$, b, B
151. $(h_a - x)$, b, C
152. $(h_a - x)$, B, C

153. $(y - x)$, b, c [C 9 d]
154. $(y - x)$, b, C
155. $(y - x)$, b, B
156. $(y - x)$, b, h_a
157. $(y - x)$, c, h_a
158. $(y - x)$, h_a, B
159. $(y - x)$, h_a, C
160. $(y - x)$, h_b, C
161. $(y - x)$, B, C
162. $(y - x)$, $(B - C)$, b [C 9 f]
*163. $(y - x)$, $(B - C)$, $(b + c)$
*164. $(y - x)$, $(B - C)$, $(b - c)$
*165. h_a, $(c - x)$, $(b - y)$, [C 126]

166. m_a, a, h_b
167. m_a, b, h_b [75 b]
168. m_a, c, h_b [61 d]
169. a, h_b, w_b
170. a, h_b, w_c
171. a, w_b B,
172. h_a, w_a, A
173. w_a, B, C
174. w_a, h_b, A
175. a, w_c, B
176. h_a, w_a, B
177. $(a + c)$, B, $\sphericalangle (a\, h_b)$
178. m_a, c, $\sphericalangle$ b $m_a)$ [61 d]
179. m_a, b, A [75 b oder 61 d]
180. m_a, h_b, A [61 d]
181. a, h_a, m_b [75 b]

182. b, m_a, c
183. (a + c), (h_a + h_c), (A + B). (51 Zus. 2 gibt den ∢ B.)
184. a, h_a, A (C 12)
185. a, m_a, A
186. h_a, h_b, A (108 Zus. 4)
187. a, h_b, h_c
188. a, h_a, h_b
189. a, A, (b + c)
190. x, y, A
191. a, b, ∢ (c m_a) (C 12)
192. a, h_a, ∢ (c m_a)
*193. a, m_b, A [C 12, 91, 63a]
194. b, h_b, ∢ (c m_a) (62c)
195. m , h_a, A
196. h_a, (y — x), (B — C)
197. y, x, (B — C)
198. a, ∢ (b m_a), ∢ (c m_a)

Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem zwei Seiten bekannt sind, und von welchem man überdies weiß, daß der von den beiden Seiten eingeschlossene Winkel

199. Gleich der Summe der beiden anderen Winkel ist,
200. Gleich der Differenz,
201. Gleich der halben Summe,
202. Gleich der doppelten Summe,
203. Gleich dem dritten Teile der Summe,
204. Gleich der dreifachen Summe der beiden andern Winkel ist [41].

Ein Dreieck in den Kreis einzuschreiben

In einen gegebenen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, von welchem gegeben sind:

205. A, h_a [108 Zus. 1, 105]
206. A, m_a
207. b, h_a
*208. b, m_a [Vgl. 193].
209. A, B

210. a, (B — C) [B + C ist durch A gegeben]
*211. h_a, (B — C) [Kann auf Nr. 184 zurückgeführt werden].
212. B, (b — c)
213. A, (b + c)
214. A, (b — c)
*215. h_a, w_a [40, 108 Zus. 1].

Konstruktion von Vierecken.

132.

Allgemeine Parallelogramme.

Parallelogramme. In einem Parallelogramm bezeichnen a, b zwei anliegende Seiten, $A > B$ zwei anliegende Winkel, D_a, D_b die zwei diese Winkel durchschneidenden Diagonalen, h_a den Abstand der Parallelen a, h_b den Abstand der Parallelen b.

Man soll ein Parallelogramm konstruieren, wenn gegeben sind:

216. D_a, D_b, h_a
217. b, h_a, D_b
218. (a + b), B, D_b
219. (a + b), h_a, D_b
220. ($a + h_a$), b, B
221. (a — b), B, D_b
222. (a — b), D_b, h_a
223. D_b — a), b, B
224. (D_b — a), b, h_a
225. $\sphericalangle (D_a D_b)$, D_b, h_a
226. $\sphericalangle (D_a D_b)$, ($D_a + D_b$), a
227. $\sphericalangle (D_a D_b)$, ($D_b - D_a$), a
228. (A — B) (a — b) D_b
229. a, h_a, h_b
230. D_b, h_a, h_b
231. ($h_a + D_b$), $\sphericalangle (b D_b)$, A.

Rechtecke.

Ein Rechteck zu konstruieren, von welchem gegeben sind:

232. Eine Seite und der ihr gegenüberliegende Winkel der Diagonalen;
233. Der Umfang und eine Diagonale:
*233a. Der Umfang (2a) und die Summe (b) aus einer Seite und Diagonale. [Läßt sich auf Konstruktion eines Dreiecks mit der Seite (b—a) zurückführen.]

Eine Raute zu konstruieren, wenn gegeben sind: Rauten.

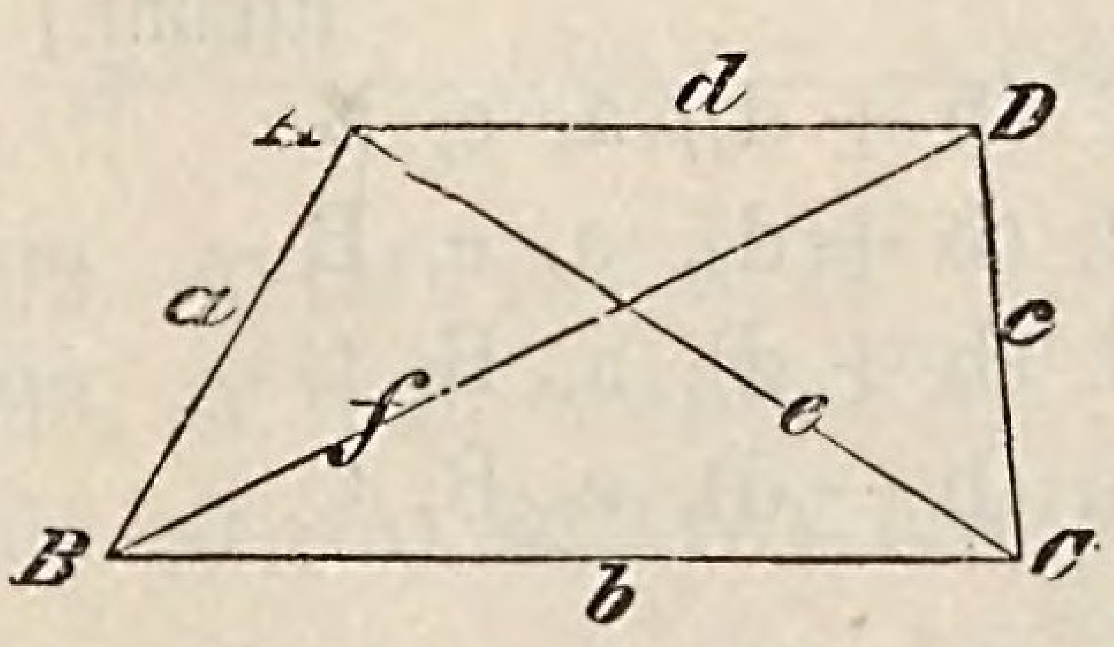
234. die Seite und eine Diagonale;
235. Seite und Höhe;
236. eine Diagonale und die Höhe;
237. beide Diagonalen;
238. die Summe der Diagonalen und der größere Winkel;
239. die Seite und die Differenz der Diagonalen;
240. die größere Diagonale und die Differenz der Winkel. Quadrate

Ein Quadrat zu konstruieren

241. aus der Summe } der Seite und Diagonale.
242. aus der Differenz } der Seite und Diagonale.

133.

Trapeze. In einem Trapeze sollen die Parallelen mit b > d, ihr Abstand mit h, die nicht parallelen Seiten mit a und c bezeichnet sein; die Winkel, welche von den Seiten (a u. b), (b u. c), (c u. d), (d u. a) eingeschlossen sind, heißen beziehungsweise B, C, D, A, die Diagonalen BD, AC sind mit f und e bezeichnet.



Ein Trapez zu konstruieren, wenn gegeben sind: Trapeze.

243. a, b, c, d
244. a, b, B, D,
245. a, b, d, C
246. b, d, B, C
247. a, c, e, C
248. b, e, B, C
249. b, d, e, C

250. b, d, e, f [61 c]
251. h, a, b, c
252. h, b, c, d
253. h, a, e, f
254. h, b, d, C
255. h, b, e, C
256. h, e, f, C

257. $\sphericalangle$ (f b), a, b, d
258. $\sphericalangle$ (f b), $\sphericalangle$ (f a), b, d
259. $\sphericalangle$ (f c), a, c, B
260. $\sphericalangle$ (e f), a, b, h
261. $\sphericalangle$ (e f), $\sphericalangle$ (f a), e, f [32 Zus.]
262. $\sphericalangle$ (e a), $\sphericalangle$ (f a), e, f

263. (a + b), c, d, e
264. (a + b), c, d, B
265. (a + b), c, d, D
266. (a + b), h, e, f
267. (a + b), h, c, B
268. (a + b), d, B, C [40]
269. (b — a), c, d, D
270. (b — a), c, d, B [durch d — (b — a), R — $\frac{B}{2}$ und c ist ein Dreieck bestimmt.]
271. (b + d), a, c, B
272. (b + d), a, e, B
273. (b + d), a, B, C
274. (b — d), e, B, C

*275. (b — d), (a — c), (C — B), $\sphericalangle$ (f b) [In dem durch Analyse ausgebildeten Dreieck, welches die beiden gegebenen Strecken enthält, kann ein Winkel bestimmt werden.]
276. (e — f), b, $\sphericalangle$ (f b), $\sphericalangle$ (e f)
277. (e — f), b, $\sphericalangle$ (f b), $\sphericalangle$ (e f)
*278. (a + b + c), d, A, D [127]

279. (a + b + c + d), h, B, D [Durch B, C, h ist ein Dreieck bestimmt]

280. (a + b + c — d), f, B, C [127].

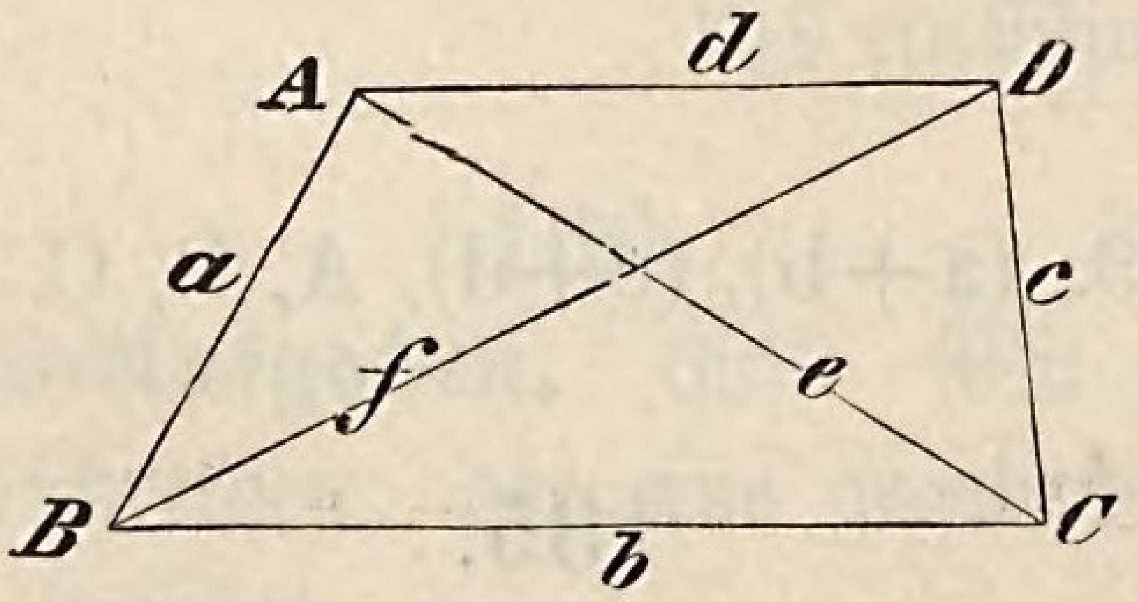
Ein Antiparallelogramm zu konstruieren, wenn bekannt sind: Antiparallelogramme.

281. a, b, d
282. a, b, B
283. b, d, B
284. a, b, e
285. a, e, B
286. b, e, B

134.

Trapezoide. Ein Trapezoid zu konstruieren, wenn analoge Bezeichnung gilt und gegeben sind: Trapezoide.

287. a, c, A, B, C [△ aus a, B, C]
288. e, a, b, c, D
289. e, a, c, A, B
290. e, a, c, B, D
291. e, f, a, b, c



292. ∢ (ef), e, f, a, b
293. ∢ (ef), e, a, b, c
294. ∢ (fa), ∢ (fc), a, c, e [der Punkt A wird als Schnittpunkt geom. Oerter gefunden]
295. ∢ (fc), ∢ (ce), a, e, f [man bestimme den Punkt B oder A als Schnittpunkt geom. Oerter]
296. ∢ (fe), ∢ (eb), (ed), e, f
297. ∢ (fe), ∢ (fb), a, e, f
288. ∢ (fe), ∢ (fa), b, e, f [der Punkt A ergibt sich durch geom. Oerter]
299. ∢ (ea), ∢ ed ∢ (ec), ∢ (fd), a

300. a, b, d, (A+B), (C—D) [Winkel können berechnet werden]

301. a, b, c, ∢ (ec), (B+C [△ ABC läßt sich bestimmen]

*302. a, c, e, f, B+C [der Punkt A kann als Schnittpunkt zweier Kreise gefunden werden]

303. (a+b), c, d, e, A
304. (a+b), c, e, f, B
305. (b—a), c, e, f, B
306. (a+b), c, d, A, B
307. (b—a), c, d, A, B
308. (a+b), c, d, A, (C+D)
309. (a+b), e, f, ∢ (fa), ∢ (ef)

*310. (a+c), e, f, ∢ (ea), (B+C) [Durch (a+c), e, ∢ (ea) ist ein Dreieck bestimmt]

*311. (a—c), e, f, ∢ (ea), (B+C) [Analog mit C 310]

*312. a, c, (e+f), ∢ (ef), (B+C) [Durch a, c, (B + C) ist ein Parallelogramm bestimmt]

313. (a+b), (c+d), A, B, C.

135.

Sehnenvierecke. **Sehnenvierecke.** Ein Sehnenviereck zu konstruieren, wenn die bisherige Bezeichnung gilt und gegeben sind:

314. a, e, ∢ (fa), ∢ (fc) [Beschreibe einen Kreis um das durch a, e, ∢ fc bestimmte Dreieck]

315. e, f, ∢ (fa), ∢ (eb) [Durch f und ∢ (fa+eb ist ein Kreis bestimmt]

316. e, f, D, ∢ (ef) [Eine Sehne von bestimmter Länge und Richtung einzutragen C 12 a]

317. a, b, e, (c+d)
318. a, b, e, (c—d).

135 a.

In einen **gegebenen Kreis** ein Viereck einzuschreiben.

Anleitung. Man beachte, daß mit jeder Sehne der zugehörige Peripheriewinkel und mit jedem Peripheriewinkel die Sehne gegeben ist. Ferner ist in einem gegebenen Kreise ein Dreieck durch zwei Seiten (zweideutig) sowie durch eine Seite und einen anliegenden Winkel (eindeutig) bestimmt.

Gegeben sind:

319. e, f, $\sphericalangle$ (ef)
320. e, A, $\sphericalangle$ (ef)
321. a, b, (c+d)
322. a, b, (c—d)
323. (a+b), e, f
324. (a—b), e, f
325. $\sphericalangle$ (ea), $\sphericalangle$ (eb), $\sphericalangle$ (ec)
326. a, $\sphericalangle$ (ec), $\sphericalangle$ (ef)
327. a, c, C
328. a, c, (B+C) [Man bringe a mit c in ein Dreieck, in welchem sich durch 109 ein Winkel bestimmen läßt.]

136.

Berührungs-Aufgaben. 329. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt. Berührung einer Geraden mit einem Kreise von gegebenem Radius.

330. An einen gegebenen Kreis Tangenten zu ziehen, welche eine vorgeschriebene Richtung haben, (indem sie entweder einer gegebenen Geraden parallel laufen, oder auf ihr senkrecht stehen, oder einen gegebenen Winkel mit ihr bilden).

331. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt, und der eine zweite gegebene Gerade berührt.

332. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

333. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben,

der eine gegebene Gerade berührt und von einer zweiten gegebenen Geraden eine Sehne von gegebener Länge abschneidet.

334. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei konvergierende Gerade berührt.

335. Von einer Geraden aus soll an einen gegebenen Kreis die kürzeste Tangente gezogen werden. (57 e.)

336. Der Durchmesser eines Kreises ist bis zu einem gegebenen Punkte A verlängert. Man soll auf der Verlängerung einen Punkt Y bestimmen, der so liegt, daß die von ihm an den Kreis gezogene Tangente der Strecke AY gleich wird.

Lösung: Die Analysis zeigt, daß die von A nach dem Berührungspunkte gezogene Secante Hypotenuse ist. (111 b.)

337. Einen Punkt zu bestimmen, der so liegt, daß die von ihm an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten die gleiche Länge a erhalten. C 31.

338. In einer gegebenen Geraden soll ein Punkt so bestimmt werden, daß die von ihm an einen gegebenen Kreis gezogene Tangente eine gegebene Länge erhält.

339. Man soll einen Punkt so bestimmen, daß die beiden von ihm aus an einen gegebenen Kreis gezogenen Tangenten mit der Verbindungsstrecke der Berührungspunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden.

340. Einen Punkt so zu bestimmen, daß die Bögen, welche zwischen den Berührungspunkten der von ihm aus an den Kreis gezogenen Tangenten liegen, sich wie 1 : 2 verhalten.

Der Radius ist zu bestimmen.

341. Um einen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden einen Kreis zu beschreiben, der die Gerade berührt.

342. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt (A) geht und eine gegebene Gerade (CD) in einem gegebenen Punkte (B) berührt.

343. Eine Strecke (a) ist der Lage und Größe nach gegeben, ferner eine mit ihr parallele Gerade (CD); man soll einen Kreis beschreiben, der die Strecke (a) als Sehne faßt und die Gerade (CD) berührt.

344. Innerhalb zweier Parallelen einen Kreis zu beschreiben, der beide berührt und durch einen zwischen den Parallelen gegebenen Punkt (A) geht.

345. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei konvergente Gerade und zwar die eine in einem gegebenen Punkte (A) berührt.

346. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Parallele und eine dieselben schneidende Gerade berührt.

347. Um zwei gegebene Punkte zwei Kreise zu beschreiben, die sich Berührung zweier Kreise

a) von außen,

b) von innen berühren.

348. Mit gegebenem Radius (a) einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte (B) berührt. Der Radius ist gegeben.

349. Mit gegebenem Radius (a) einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt (D) geht und einen gegebenen Kreis berührt.

350. Mit gegebenem Radius (a) einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden (CD) liegt.

351. Mit gegebenem Radius (a) einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt, und dessen Mittelpunkt in der Peripherie eines gegebenen Kreises liegt.

352. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

353. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise berührt

a) beide einschließend,

b) beide ausschließend,

c) den einen einschließend, den andern ausschließend.

354. Mit gegebenem Radius (a) einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt und von einer gegebenen Geraden (CD) eine Sehne von gegebener Länge (b) abschneidet.

355. Um einen gegebenen Punkt (A) einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis berührt. Der Radius ist zu bestimmen.

356. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt (A) geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte (B) berührt.

357. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Gerade und einen diese Geraden berührenden Kreis berührt, wenn die Geraden

a) parallel sind,

b) konvergieren.

358. Einen Kreis zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte (B) und eine gegebene Gerade (CD) berührt.

359. Einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene Gerade (CD) in einem gegebenem Punkte (B) und einen gegebenen Kreis berührt.

Die Lösung kann auf C 94 zurückgeführt werden.

360. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt, der die Gerade in einem gegebenen Punkte A schneidet und einen gegebenen Kreis berührt.

Lösung wie C 359.

361. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise von außen, und zwar den größern in einem gegebenen Punkte berührt. [76.]

362. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise, und zwar den größeren von außen in einem gegebenen Punkte berührt, während er den kleineren berührend einschließt. [76].

363. Einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene gleich große Kreise berührt.

Gemeinschaftliche Tangente.

364. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, welche die Centrale nicht schneidet.

Die Lösung kann auf C 67 zurückgeführt werden.

365. An zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, welche die Centrale schneidet.

Lösung analog 364.

366. Man soll eine Gerade so ziehen, daß die zwei von zwei gegebenen Punkten (A und B) auf sie gefällten Perpendikel zwei gegebenen Strecken (c und d) gleich werden.

Umgeschriebene Dreiecke.

367. In ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, der die drei Seiten berührt.

368. Die drei einem Dreiecke angeschriebenen Kreise zu konstruieren.

369. Ein Winkel und ein Punkt (B) sind gegeben; man soll von diesem aus eine Gerade so ziehen, daß sie mit den Winkelschenkeln ein Dreieck von gegebenem Umfange (a) bildet. 105 a·7).

370. Man soll von einem gegebenen Punkte (A) außerhalb eines Dreiecks aus durch eine Gerade von zwei Seiten des Dreiecks Stücke abschneiden, deren Summe gleich der Transversale ist. (Kann auf 369 zurückgeführt werden.)

371. Es sind drei Punkte gegeben, man soll einen Kreis so konstruieren, daß die drei von diesen Punkten aus an ihn gezogenen Tangenten gleich groß werden. (Unbestimmt.)

Um einen gegebenen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, wenn gegeben sind:

372. ein Winkel (α) und dessen Halbierungstransversale (w_a);

373. eine Seite (c) und die zu einer andern Seite gehörige Höhe (h_a);

374. ein Winkel (A) und die Summe (b + a) einer anliegenden und der gegenüberliegenden Seite: [56a, 41, 43 führen zu C 12.]

375. ein Winkel (A) und die zur gegenüberliegenden Seite gehörige Höhe (h_a) [C 364];

376. eine Höhe und die von demselben Ecke aus gehende Winkelhalbierungstransversale. [Letztere geht durch den Mittelpunkt.]

376a. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn ein Winkel, die Differenz zwischen einer anliegenden und der gegenüberliegenden Seite und der Radius des eingeschriebenen Kreises gegeben sind.

Ein Tangentenviereck zu konstruieren, wenn die für die Vierecke oben eingeführte Bezeichnung gilt, und gegeben sind: Tangentenvierecke.

377. a, b, c, e

378. a, b, e, A [Läßt sich auch auf C 92 zurückführen.]

379. a, A, B, C [Läßt sich auch auf C 97 zurückführen.]

380. a, b, (c+d), A

381. a, b, (c+d), e.

382. Um einen gegebenen Kreis ein Viereck zu beschreiben, wenn eine Seite, ein anliegender Winkel und die ihm gegenüberliegende Diagonale gegeben sind.

Zweiter Teil.

Der Flächeninhalt der Figuren.

I. Abschnitt.

Bestimmungsstücke der Größe.

137.

Flächenmaße.

Erklärungen. Die Aufgabe: die Größe einer ebenen Figur anzugeben, führt zunächst zur Aufstellung eines Flächenmaßes.

Man ist übereingekommen, als Flächenmaß dasjenige Quadrat anzunehmen, dessen Seite die Längeneinheit ist.

Da wir das Meter als Längeneinheit angenommen haben, so ist unsere Flächeneinheit das Quadratmeter (qm).

Teilt man zwei anliegende Seiten dieses Quadrats, jede in 10 gleiche Teile (Decimeter) und zieht durch die Teilpunkte Parallele zu den Seiten, so wird das Quadratmeter in 10.10 Quadrate zerlegt, deren Seiten Decimeter sind, so daß 1 Quadratmeter 100 Quadratdecimeter (qdm) enthält.

Ebenso ergiebt sich, daß ein Quadratdecimeter 100 Quadratcentimeter (qcm), und ein Quadratcentimer 100 Quadratmillimeter (qmm) enthält.

1 qm = 100 qdm = 10 000 qcm — 1 000 000 qmm.

Das Quadratdekameter, welches 100 qm hat, und Ar (a = are, Acker) genannt wird, ist als kleineres Feldmaß üblich, während das Quadrathektometer = 10 000 qm = 100 a, und deßhalb Hektar (ha) genannt, zur Messung größerer Feld- und Waldflächen angewendet wird. Das Quadratkilometer = 100 Hektar.

Aeltere Flächenmaße sind, auf den Fuß als Längeneinheit gegründet: der Quadratfuß (□'), der in 144 Quadratzoll (□") oder (144.144) Quadratlinien (□‴) geteilt ist; die Quadratklafter = 36 □'; die Quadratrute (□°) = 144 □'; das Tagwerk und der Morgen, als Feldmaße mit sehr verschiedenen Werten, z. B.

Ein bayerisches Tagwerk (= 40 000 b. □' in 100 Dezimalen geteilt) = 34,07 Ar.

Ein preußischer Morgen (= 180 pr. □ Ruten) = 25,53 Ar. (Es enthält somit das Hektar nahezu 3 bayerische Tagwerke oder 4 preußische Morgen.) Die (geographische) Quadratmeile.

138.

Erklärungen. Die sofort erkannte Unmöglichkeit, jede ebene Figur, welche Form sie auch haben mag, unmittelbar durch ein Quadrat zu messen, d. h. durch Probieren zu untersuchen, wie oft ein gewähltes Quadrat auf der Fläche aufgetragen oder in dieselbe eingezeichnet werden kann, andererseits die schon im ersten Teile gewonnene Erkenntnis, daß Figuren durch Linien allein oder Linien und Winkel vollkommen, d. h. nach Größe und Form bestimmt werden können, heißt uns die Frage aufwerfen: Präzisierung der Aufgabe.

1) Durch welche Merkmale ist die Größe einer Figur vollkommen bestimmt? Oder, was dasselbe ist, welche Bestimmungsstücke zweier Figuren müssen gleich sein, damit die Figuren selbst gleiche Größe haben?
2) In welcher Weise ist die Größe der Figur durch diese ihre Merkmale bestimmt, d. h. welche arithmetischen Operationen sind mit den Maßzahlen der Bestimmungsstücke auszuführen, damit dadurch die Anzahl der in der fraglichen Figur enthaltenen Flächeneinheiten erhalten wird?

Durch die Kongruenzfälle und die aus denselben gezogenen Schlüsse sind nun für jede der bisher betrachteten Figuren schon Merkmale bekannt, welche zur Bestimmung des Flächeninhaltes derselben jedenfalls vollkommen hinreichen. Da aber durch jene Merkmale zugleich die Form der Figur mitbestimmt ist, diese aber bei der Frage nach der Größe ganz außer Acht gelassen werden kann, so ist zu erwarten, daß jene Merkmale zur Bestimmung des Flächeninhaltes nicht sämtlich erforderlich sind.

Im Folgenden wird die Untersuchung auf die Abhängigkeit des Inhaltes von der Länge von Strecken beschränkt.

139.

Lehrsatz. Die Größe eines Parallelogramms ist durch eine seiner Seiten (Grundlinie) und den Abstand derselben von der ihr gegenüberliegenden Seite bestimmt; oder (Zwei) Parallelo- Bestimmungsstücke der Größe des Parallelogramms.

gramme sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

Beweis. Man legt die Parallelogramme mit ihren Grundlinien auf einander, dann fallen die gegenüberliegenden Seiten in die Gerade, welche durch die Endpunkte der beiden Höhen bestimmt ist (61 Zus. 2). Diese Seiten haben dann entweder einen Punkt gemeinschaftlich oder nicht. Im ersteren Falle sind die nicht gemeinschaftlichen Teile der Parallelogramme kongruent, im letzteren hat man zu diesen nicht gemeinschaftlichen Teilen noch dasselbe Dreieck zu addieren, um dadurch kongruente Dreiecke zu erhalten.

140.

Die Größe des Dreiecks.

Lehrsatz. Die Größe eines Dreiecks ist durch eine Seite und die zu derselben gehörige Höhe bestimmt; oder: (Zwei) Dreiecke sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und Höhen haben.

Beweis. Man ergänze jedes der (beiden) Dreiecke zu dem durch dasselbe bestimmten Parollelogramme, so daß die als gleich bekannten Grundlinien Seiten der Parallelogramme werden. Die so erhaltenen Parallelogramme sind gleich (139), folglich auch die Dreiecke (61 a).

Zusatz 1. Dreiecke sind gleich groß, wenn sie eine gemeinschaftliche Grundlinie haben und ihre Spitzen in einer zur Grundlinie parallelen Geraden liegen.

Zusatz 2. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, mit welchem es gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beweis. Man ergänze das Dreieck zum Parallelogramme und wende 139 und 61 a an.

Zusatz 3. Die Größe eines Polygons ist bestimmt, wenn die Größe der einzelnen Dreiecke bestimmt ist, in welche es durch die von einem Ecke aus gezogenen Diagonalen zerlegt wird, z. B. die Größe eines Viereckes durch eine Diagonale und die von den gegenüberliegenden Ecken auf dieselbe gefällten Senkrechten.

141.

Die Größe des Trapezes.

Lehrsatz. Die Größe eines Trapezes ist bestimmt durch seine Höhe und die Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten verbindet. Oder:

Trapeze sind gleich, wenn sie gleiche Höhen und Mittellinien haben.

Beweis. Man konstruiere zu jedem der Trapeze ein Parallelogramm wie in 74 b und beweise durch die Kongruenz der nicht gemeinschaftlichen Teile, daß das Trapez dem Parallelogramme gleich ist. Die Gleichheit der Parallelogramme folgt aus 139.

Zusatz. Ein Trapez ist einem Parallelogramme gleich, welches mit ihm gleiche Höhe und die Mittellinie des Trapezes zur Grundlinie hat.

142.

Übungssätze. 1) Ein Dreieck ist einem Parallelogramme gleich, das bei gleicher Höhe die halbe Grundlinie, oder bei gleicher Grundlinie die halbe Höhe des Dreiecks hat. Übungen.

2) Zieht man durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten die Verbindungsstrecke und zwei beliebige Parallele nach der dritten Seite, so entsteht ein Parallelogramm, welches halb so groß ist wie das Dreieck.

3) Verbindet man die Mittelpunkte der drei Seiten eines Dreiecks, so entstehen drei Parallelogramme, deren jedes halb so groß ist als das Dreieck.

4) Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so entstehen vier Parallelogramme, von denen diejenigen gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht.

5) Zieht man durch einen beliebigen Punkt innerhalb eines Parallelogramms Strecken nach den vier Endpunkten, so entstehen vier Dreiecke, von welchen je zwei gegenüberliegende zusammen halb so groß sind wie das Parallelogramm.

6) Zieht man durch einen beliebigen Punkt außerhalb eines Parallelogramms Strecken nach den vier Endpunkten, so entstehen über den Seiten des Parallelogramms vier Dreiecke, von denen zwei sich zur Hälfte des Parallelogramms ergänzen, während die Differenz der beiden andern ebenfalls halb so groß ist wie das Paralellogramm.

Die Untersuchung wird mit Hilfe einer Parallelen geführt, die man zu einem Seitenpaare durch den Punkt zieht.

7) Das Parallelogramm, welches seine vier Ecken in den Mittelpunkten der vier Seiten eines Vierecks hat, ist halb so groß wie dieses Viereck.

8) Halbiert eine Diagonale des Vierecks die andere Diagonale, so halbiert sie auch das Viereck. 140.

9) Halbiert man zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks und verbindet die Halbierungspunkte mit zwei einander gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein Viereck, welches halb so groß ist als das gegebene.

Beweis. Durch Ziehen einer Diagonale wird 140 anwendbar.

10) Das Dreieck, welches entsteht, wenn man die Endpunkte einer der nicht parallelen Seiten des Trapezes mit dem Mittelpunkte der andern verbindet, ist die Hälfte des Trapezes.

11) Durch die Strecke, welche die Mittelpunkte der parallelen Seiten eines Trapezes verbindet, wird dasselbe in zwei gleiche Teile geteilt. 141.

II. Abschnitt.

Verhältnis der Flächen.

143.

Verhältnis der Rechtecke.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Rechtecke (R_1 und R_2), welche eine Seite (a) gleich haben, verhalten sich wie die beiden andern Seiten (b_1 und b_2).

Erläuterung. Die Fläche R_2 ist ebenso oft in der Fläche R_1 enthalten, als die Länge b_2 in b_1:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2}{}^{*)}$$

Beweis. a) Sind die beiden Seiten b_1 und b_2 kommensurabel, so daß es eine dritte Länge (l) gibt, welche in beiden ohne Rest enthalten ist, so denke man sich diese Länge so oft als möglich (n_1=beziehungsweise $n_2$mal) auf den beiden Seiten abgetragen und errichte in jedem Teilpunkte eine Senkrechte; so werden die Rechtecke R_1 und R_2 in kleinere Rechtecke (ϱ) geteilt, welche (nach 139) alle gleich groß sind. Nun ist

$$R_1 = n_1\varrho;\ b_1 = n_1 l;$$
$$R_2 = n_2\varrho;\ b_2 = n_2 l;$$

woraus durch Division erhalten wird:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{n_1}{n_2},\ \frac{b_1}{b_2} = \frac{n_1}{n_2};$$

$$\text{somit } \frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

---

* Ausführlicheres über Proportionen in Nr. 163.

b) Sind die Längen b_1 und b_2 inkommensurabel, so wird der Beweis indirekt ganz analog geführt wie in 106.

Wäre nämlich für diesen Fall die Proportion

$$R_1 : R_2 = b_1 : b_2$$

unrichtig, so könnte sie jedenfalls durch Einsetzen einer anderen Länge b_3 für b_2 richtig gemacht werden, so daß

$$R_1 : R_2 = b_1 : b_3$$

richtig wäre. Es kann aber b_3 weder größer noch kleiner als b_2 sein. Denn wäre z. B.

$$b_3 < b_2$$

also $b_2 - b_3$ eine bestimmte Länge β, so läßt sich (z. B. durch fortgesetzte Halbierung) b_1 in so kleine Teile teilen, daß jeder Teil (l) kleiner als β wird, und trägt man diese Teile nun auf b_2 an, so fällt wenigstens ein Teilpunkt zwischen den Endpunkt von b_3 und den von b_2, und bildet den Endpunkt einer Länge b_4, so daß $b_3 < b_4 < b_2$ ist.

Das zur Grundlinie b_4 konstruierte Rechteck $R_4 < R_2$ hat eine zu b_1 kommensurable Grundlinie, und es gilt nach dem in a) bereits Bewiesenen:

$$R_1 : R_4 = b_1 : b_4$$

oder $\frac{R_1}{b_1} = \frac{R_4}{b_4}$, dazu aus der Voraussetzung

$$\frac{R_1}{b_1} = \frac{R_2}{b_3},$$

gibt $\frac{R_4}{R_2} = \frac{b_4}{b_3}$, was unmöglich ist, weil

$\frac{R_4}{R_2}$ ein ächter, $\frac{b_4}{b_3}$ aber ein unächter Bruch ist.

Ganz ähnlich kann die Unmöglichkeit der Annahme

$$b_3 > b_2$$

dargethan werden.

144.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte anliegender Seiten.

Behauptung. $R_1 : R_2 = (a_1 b_1) : (a_2 b_2.)$

Beweis. Man denke sich ein Hilfs-Rechteck R mit den Seiten a_1 und b_2, so ist nach 143:

$$R_1 : R = b_1 : b_2,$$

$$R : R_2 = a_1 : a_2.$$

Daraus folgt durch Multiplikation die Behauptung.

145.

Verhältnis der Parallelogramme.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Parallelogramme verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Behauptung. Hat das Parallelogramm P_1 die Grundlinie g_1 und die Höhe h_1, das Parallelogramm P_2 die Grundlinie g_2 und die Höhe h_2, so gilt

$$P_1 : P_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2).$$

Beweis. Denkt man sich zwei Rechtecke R_1 und R_2, deren anstoßende Seiten beziehungsweise g_1, h_1 und g_2, h_2 sind, so gilt

$$R_1 : R_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2).$$

Für diese Rechtecke können die Parallelogramme eingesetzt werden. 139.

Zusatz 1. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Zusatz 2. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

146.

Verhältnis der Dreiecke.

Lehrsatz. Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

Behauptung. Hat das Dreieck $\triangle_1$ die Grundlinie g_1 und die Höhe h_1, das Dreieck $\triangle_2$ die Grundlinie g_2 und die Höhe h_2 so gilt

$$\triangle_1 : \triangle_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2).$$

Beweis. Die behauptete Proportion gilt für zwei Parallelogramme, welche die Dimensionen g_1, h_1; g_2, h_2 haben:

$$P_1 : P_2 = (g_1 h_1) : (g_2 h_2), \text{ woraus}$$

$$\frac{P_1}{2} : \frac{P_2}{2} = (g_1 h_1) : (g_2 h_2) \text{ folgt.}$$

Da nun $\triangle_1 = \frac{P_1}{2}$ und $\triangle_2 = \frac{P_2}{2}$ (140 Zus. 2), so folgt die Behauptung durch Substitution.

Zusatz 1. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

Zusatz 2. Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

147.

Lehrsätze. a) Trapeze verhalten sich wie die Produkte aus ihren Mittellinien und Höhen. Verhältnis der Trapeze.

b) Trapeze von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Mittellinien.

c) Trapeze, welche gleich große Mittellinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen.

148.

Lehrsätze. a) Zwei Parallelogramme, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten. Verhältnis von Parallelogrammen und Dreiecken mit gleichen oder supplementären Winkeln.

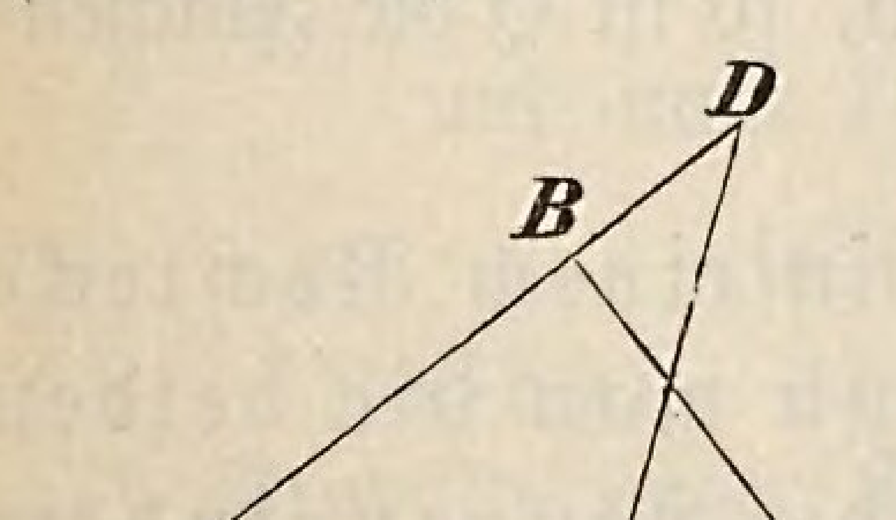
Behauptung. Sind P_1 mit den Seiten a_1 und b_1, P_2 mit den Seiten a_2 und b_2 die in Rede stehenden Parallelogramme, so gilt:

$$P_1 : P_2 = (a_1\, b_1) : (a_2\, b_2).$$

Beweis Man konstruiere ein Hilfsparallelogramm, welches den gleichen Winkel wie die gegebenen Parallelogramme und die Seiten a_1 und b_2 hat, wende 145 Zus. 1 zweimal an, so erhält man durch passende Verbindung der Gleichungen das Behauptete.

b) Zwei Dreiecke, welche einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Behauptung. $\triangle ABC : \triangle AED\ (AB \,.\, AC):$ $(AD \,.\, AE.)$



Beweis. Man führt den Satz entweder mit Hilfe von 140 Zus. 2 auf a) zurück; oder beweist ihn unmittelbar, indem man die Dreiecke so aufeinanderlegt, daß sie den gleichen Winkel gemeinschaftlich haben.

Dann wird ein Hilfsdreieck, welches man sich durch Ziehen der Strecken BE oder DC verschafft, unter Anwendung von 146 Z. 1. mit den beiden gegebenen Dreiecken verglichen. Durch passende Verbindung der so erhaltenen Gleichungen eliminiert sich das Hilfsdreieck.

c) Zwei Dreiecke, welche supplementäre Winkel haben, verhalten sich wie die Produkte der diese Winkel einschließenden Seiten.

Beweis. Man legt die Dreiecke so an einander, daß die supplementären Winkel einen gestreckten bilden und verfährt dann analog wie in b).

Zusatz. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, wenn es mit demselben einen Winkel und das Produkt der diesen Winkel einschließenden Seiten gleich hat.

Lehrsatz. Die beiden Dreiecke, in welche ein Viereck durch eine Diagonale geteilt wird, verhalten sich wie die Abschnitte der anderen Diagonale.

Beweis durch 146 Z., 148b, 148b, 5.

III. Abschnitt.

Maß der Flächen.

149.

Inhalt des Rechtecks. **Maß des Rechtecks.** Vergleicht man das Rechteck R, dessen Seiten a und b sind, mit dem Quadrate Q von der Seite q, so ist nach 144

$$R : Q = (ab) : (qq),$$

$$\text{oder } R = \left(\frac{a}{q} . \frac{b}{q}\right) . Q.$$

Ist nun die Seite q die Längeneinheit, so ist Q die Flächeneinheit und der Satz lautet in Worten:

Man erhält die Anzahl der in einem Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die beiden Zahlen, welche angeben, wie oft die Längeneinheit in den zwei Seiten des Rechtecks enthalten ist, mit einander multipliziert.

Dieses ist der vollständige Sinn des durch die Annahme $q = 1$, $Q = 1$ abgekürzten Ausdruckes

$$R = ab,$$

(in Worten) der Inhalt eines Rechtecks ist dem Produkte zweier anstoßenden Seiten gleich.

Zusatz 1. Man erhält die Maßzahl für die Fläche eines Quadrates, wenn man die Maßzahl seiner Seite mit 2 potenziert.*)

Zusatz 2. Sind a und b Maßzahlen von Strecken, so kann man immer unter a b den Flächeninhalt des aus den Strecken konstruierten Rechtecks und unter a^2 den Flächeninhalt des über der Strecke von der Länge a errichteten Quadrates verstehen.

Somit muß den analytischen Umformungen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2,$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

eine geometrische Bedeutung zukommen, welche leicht abgelesen werden kann.

Anmerkung. Der Beweis dieser Sätze kann auch durch geometrische Konstruktion geführt werden.

150.

Lehrsatz. Man erhält die Anzahl der in einem Parallelogramme enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die Maßzahlen seiner Grundlinie und Höhe mit einander multipliziert. (Der Inhalt eines Parallelogramms ist dem Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich.) Inhalt des Parallelogramms.

Beweis. Sind g und h die Maßzahlen für Grundlinie und Höhe des Parallelogramms P, so ist es nach 139 einem Rechtecke R gleich, dessen anstoßende Seiten die Längen g und h haben. Da nun nach 149:

$$R = gh,$$
$$\text{und nach 139}\quad P = R;$$
$$\text{so folgt}\quad P = gh.$$

Zusätze. 1) Der Inhalt eines Rhombus ist dem halben Produkte seiner Diagonalen gleich.

2) Der Inhalt eines Quadrats ist halb so groß, als das Quadrat über seiner Diagonale.

151.

Lehrsatz. Man erhält die Anzahl der in einem Dreiecke enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die Maßzahlen seiner Inhalt des Dreiecks.

*) Aus diesem Grunde pflegt man in der Arithmetik die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat der Zahl zu nennen.

Grundlinie und Höhe mit einander multipliziert und das erhaltene Produkt durch 2 dividiert. (Der Inhalt eines Dreiecks ist dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe gleich.)

Beweis. Sind g und h die genannten Maßzahlen, so ist das Dreieck (△) die Hälfte des Parallelogramms P, welches eben diese Dimensionen g und h hat. Da nun nach 150

$$P = gh, \frac{P}{2} = \frac{gh}{2}, \text{ und } \frac{P}{2} = \triangle, \text{ so folgt}$$

$$\triangle = \frac{gh}{2}.$$

Zusatz 1. Der Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks ist dem halben Produkte der Katheten gleich.

Zusatz 2. Der Inhalt eines beliebigen Polygons wird erhalten, wenn man nach der gegebenen Regel den Inhalt aller Dreiecke berechnet, in welche das Polygon durch die von einem Ecke aus gezogenen Diagonalen zerlegt wird, und die so erhaltenen Zahlen addiert. — So findet man z. B. den Inhalt eines Vierecks, wenn man die Länge einer Diagonale mit der halben Summe der Senkrechten multipliziert, welche von den zwei gegenüberliegenden Ecken auf die Diagonale gefällt sind.

152.

Inhalt des Trapezes.

Lehrsatz. Man erhält die Anzahl der in einem Trapeze enthaltenen Flächeneinheiten, wenn man die halbe Summe der beiden Parallelen mit der Maßzahl der Höhe multipliziert. (Der Inhalt eines Trapezes ist dem Produkte aus dem arithmetischen Mittel der Parallelen in die Höhe gleich.)

Behauptung. Sind b und d die Maßzahlen für die beiden Parallelen, h die Maßzahl der Höhe, so ist der Inhalt T des Trapezes.

$$T = \frac{b+d}{2} h$$

Beweis. $\frac{b+d}{2}$ ist nach 74b die Länge der Mittellinie des Trapezes. 141 Z. Auch durch zweimalige Anwendung von 151.

IV. Abschnitt.

Beziehungen zwischen den Dimensionen eines Dreiecks.

153.

Erklärung. Aus dem vorigen Abschnitte ist ersichtlich, daß der Flächeninhalt der Dreiecke, Paralellogramme . . . in sehr einfacher Weise von zwei Bestimmungsstücken, der Grundlinie und Höhe, abhängig ist. Es bleibt somit die Frage zu lösen, wie in denjenigen Fällen, in welchen diese zwei Bestimmungsstücke nicht selbst gegeben, aber durch andere gegebene Strecken bestimmt sind, Grundlinie und Höhe aus den gegebenen Bestimmungsstücken berechnet werden können. Dazu ist nötig, die Dimensionen der Figuren zu einander in bestimmte, mittelst Gleichungen darstellbare Beziehungen zu bringen. Präzisierung der Aufgabe.

Die Bedeutung der folgenden Sätze ist wesentlich die, daß sie Gleichungen zwischen den Maßzahlen der Dimensionen ebener Figuren aufstellen, welche die Berechnung einer unbekannten Länge aus gegebenen Längen ermöglichen.

Aus diesem Grunde ist der arithmetischen Darstellung der Sätze und Beweise hier der Vorzug gegeben; der geometrische Sinn derselben erhellt aus 149 Zusatz 2; Beweise durch geometrische Konstruktion können als nützliche Uebungen betrachtet werden.

154.

Lehrsatz. Das Produkt der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist dem Produkt aus der Hypotenuse und der ihr zugehörigen Höhe gleich.

Beweis durch 151.

155.

Lehrsätze. Fällt man im rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist Senkrechte vom Scheitel des rechten Winkels.

a) Das Quadrat dieser Senkrechten gleich dem Produkte aus den Abschnitten der Hypotenuse.

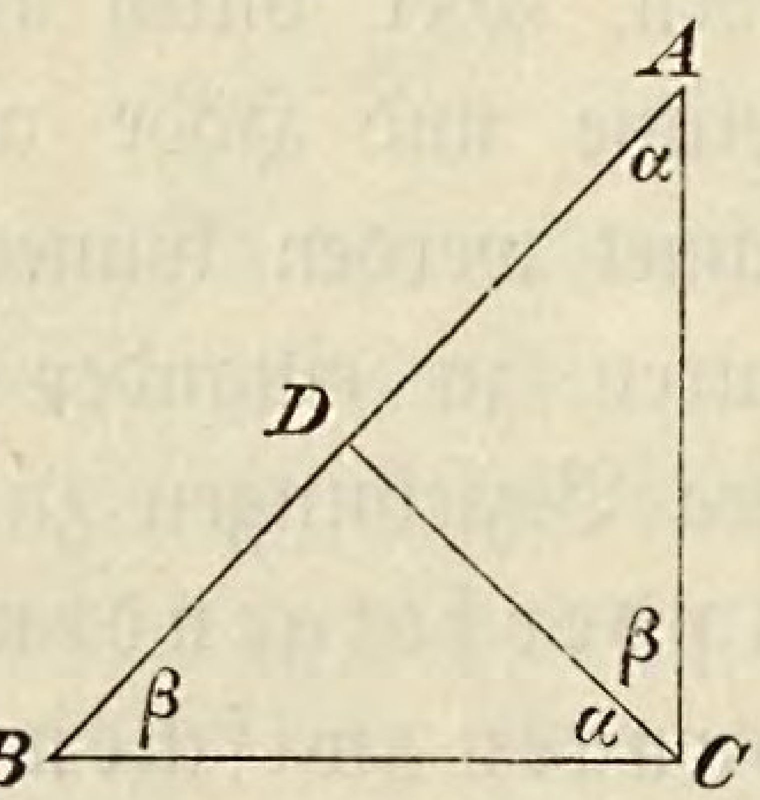
(Die Senkrechte ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Hypotenuse.)

b) Das Quadrat jeder Kathete ist gleich dem Produkte aus der Hypotenuse in die Projektion der Kathete auf die Hypotenuse.

(Die Kathete ist die mittlere Proportionale zur ganzen Hypotenuse und dem ihr anliegenden Abschnitte derselben.)

Behauptungen. a) $CD^2 = BD \cdot AD$.

b) $\begin{cases} AC^2 = AB \cdot AD; \\ BC^2 = AB \cdot BD. \end{cases}$



Beweise. Zu a). In den Dreiecken ACD und BCD ist

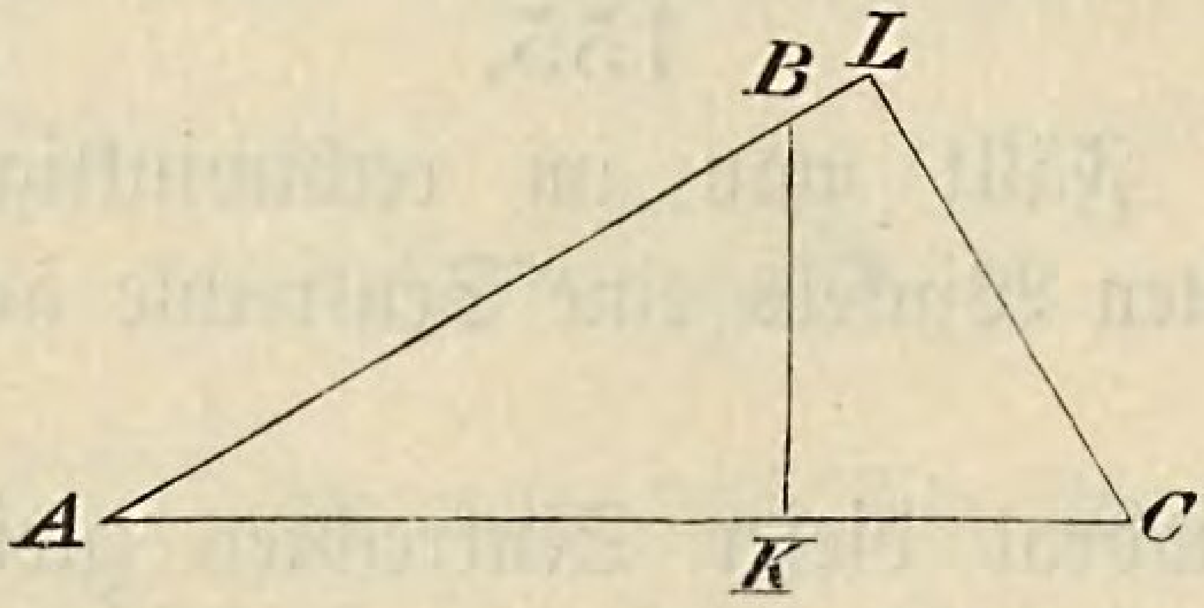
$\sphericalangle A = \sphericalangle BCD$

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$.

Wendet man nun auf diese beiden Dreiecke zweimal den Satz 148b an, dann 5, so ist der Nachweis der ersten Behauptung nur noch von arithmetischen Umformungen abhängig.

Zu b). Vergleicht man zweimal das Dreieck ACD mit ABC mit Rücksicht darauf, daß sie den Winkel β und den rechten Winkel gleich haben, so ergibt sich $AC^2 = AB . AD$. Durch Vergleichung der Dreiecke BCD und BAC erhält man ebenso $BC^2 = AB . BD$.

Die auf der Hypotenuse senkrechte Transversale. c) (Verallgemeinerung des Lehrsatzes 155b.) Schneidet man auf den beiden Schenkeln eines Winkels



beliebig lange Strecken (AB und AC) ab und projiziert jede derselben auf den anderen Schenkel, so sind die Produkte (Rechtecke) gleich, welche man erhält, wenn

man je eine Strecke mit der Projektion der anderen multipliziert.

Behauptung. AB.AL = AC.AK.

Beweis ähnlich wie zu b).

156.

Lehrsatz. Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich. (Pythagoreischer Lehrsatz.) Beziehung zwischen den drei Seiten des rechtw. Dreiecks.

Beweis. Denkt man sich aus dem Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse gefällt, so gilt nach 155b

$$AC^2 = AB.AD$$
$$BC^2 = AB.BD;$$
$$\text{daher } AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD)$$
$$\text{oder } AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Anmerkung. Ein von den hier zunächst vorausgehenden Sätzen unabhängiger Beweis läßt sich dadurch geben, daß man die erwähnten Quadrate wirklich konstruiert und CD (154) so verlängert, daß das Quadrat über der Hypotenuse in zwei Rechtecke geteilt wird. Von diesen ist jedes dem Quadrate gleich, mit dem es ein Eck gemeinschaftlich hat. Um diese Gleichheit zu beweisen, konstruiert man zwei (stumpfwinklige) Hilfs-Dreiecke, deren jedes nach 140 Zus. 2 die Hälfte von einer der als gleich zu erweisenden Figuren ist. Die Dreiecke selbst sind nach 48 (I) kongruent.

Zusatz. Mit Hilfe des Lehrsatzes läßt sich die Länge einer Seite des rechtwinkligen Dreiecks berechnen, wenn die Länge der beiden anderen bekannt ist.

157.

Lehrsatz. Stehen die drei Seiten, (a, b, c) eines Dreiecks in solcher Beziehung, daß Bedingung, welcher die Seiten eines Dreiecks genügen müssen damit dasselbe rechtwinklig sei.

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

so ist der Winkel (A), welcher der Seite a gegenüberliegt, ein rechter.

Beweis. Man denke sich ein rechtwinkliges Dreieck mit b und c als Katheten; ist die Hypotenuse desselben h, so

ist $h^2 = b^2 + c^2$. Nach der Voraussetzung ist $a^2 = b^2 + c^2$, daher

$$a^2 = h^2$$

Gleichflächige Quadrate können aber nicht verschieden lange Seiten haben, daher

$$a = h. \text{ (Schluß durch 50.)}$$

Zusatz. Pythagoreische Dreiecke.

Aus dem Lehrsatze folgt: Stehen drei Zahlen in solcher Beziehung zu einander, daß das Quadrat der einen gleich der Summe der Quadrate der beiden andern ist, so wird ein Dreieck, welches man aus Strecken konstruiert, deren Maßzahlen jenen Zahlen gleich (oder proportional) sind, stets rechtwinklig. Da aber die Summe oder Differenz der Quadrate zweier Zahlen im allgemeinen nicht wieder ein Quadrat ist, so ist das Verhältnis der Hypotenuse zu einer Kathete oder der Katheten zu einander im allgemeinen irrational und die Strecken selbst inkommensurabel.

Diejenigen rechtwinkligen Dreiecke, in welchen die Verhältnisse aller drei Seiten zu einander rational sind, die drei Seiten demnach ein gemeinschaftliches Maß haben, heißen pythagoreische Dreiecke.

Sollen h die Hypotenuse, b und c die Katheten eines pythagoreischen Dreiecks sein, so muß

$$b^2 = h^2 - c^2,$$
$$b = \sqrt{h^2 - c^2},$$

und b zugleich mit h und c rational sein.

Durch arithmetische Umformung ist

$$b = \sqrt{(h + c)(h - c)}$$

Setzt man $h + c = x$, $h - c = y$,

so wird $h = \frac{x + y}{2}$, $c = \frac{x - y}{2}$

und $b = \sqrt{xy}$,

rational, wenn xy die zweite Potenz irgend einer endlichen Zahl ist.

Es ist also die Aufgabe, ein pythagoreisches Dreieck zu finden, darauf zurückgeführt, zwei Zahlen (x und y) zu ermitteln, welche den Bedingungen genügen, daß $x > y$ und xy eine zweite Potenz ist. Ist dieses der Fall, so sind

$$\frac{x + y}{2}, \; \frac{x - y}{2} \text{ und } \sqrt{xy}$$

die drei Seiten des verlangten Dreiecks. Beispiel: $x = 12$, $y = 3$.

Sollen dieselben überdies ganzzahlige Maße haben, so muß man x und y ganzzahlig und so wählen, daß beide gerade oder beide ungerade Zahlen sind.

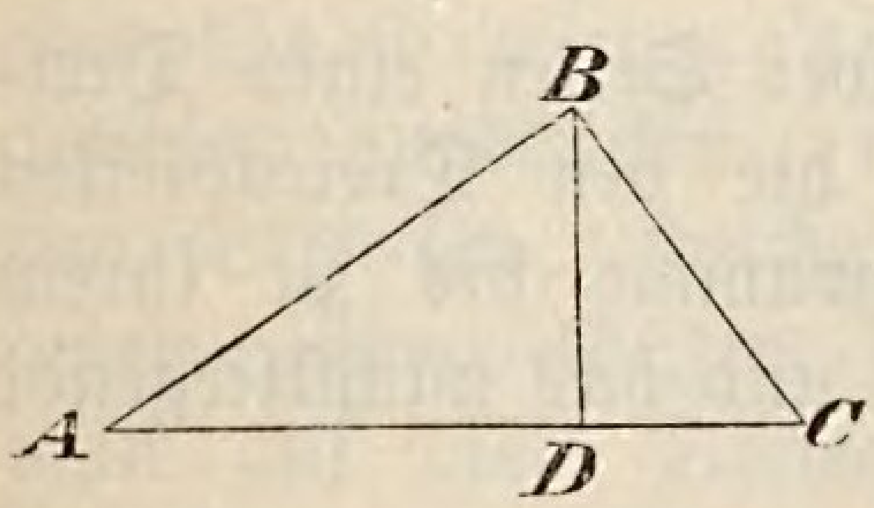
Demnach werden alle möglichen pythagoreischen Dreiecke mit ganzen Maßzahlen der Seiten gefunden, wenn man in den durch Kombination erhaltenen Produkten der auf einander folgenden Primzahlen

(1.2) 1.3, 1.5, 1.7 . . . .
2.3, 2.5, 2.7 . . . .
3.5, 3.7 . . . .
. . . .
1.2.3, 1.2.5, 1,2.7 . . . .
1.3.5, 1.3.7 . . . .
. . . .

jeden Faktor mit einer (beliebigen) geraden Zahl potenziert, das erhaltene Produkt (xy) beliebig in zwei ungleiche Faktoren zerlegt und dabei nur darauf Rücksicht nimmt, daß der Prim-Faktor 2 entweder in beiden oder in keinem der Faktoren vorkommt.

Diesen zwei Bedingungen läßt sich nur in dem besonderen Falle $1^2 . 2^2$ nicht genügen. Im übrigen liefern diejenigen Kombinationen, in welchen man den Faktor 2 nur mit 2 potenziert hat, keine neuen Dreiecke, weil dann die Maßzahlen der 3 Seiten gerade Zahlen werden. . . . .

158.



Lehrsatz. Liegt eine Dreiecksseite einem spitzen Winkel gegenüber, so ist das Quadrat dieser Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Produkte aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe. Gegenseite eines spitzen Winkels.

Voraussetzung. $\sphericalangle C < R$.

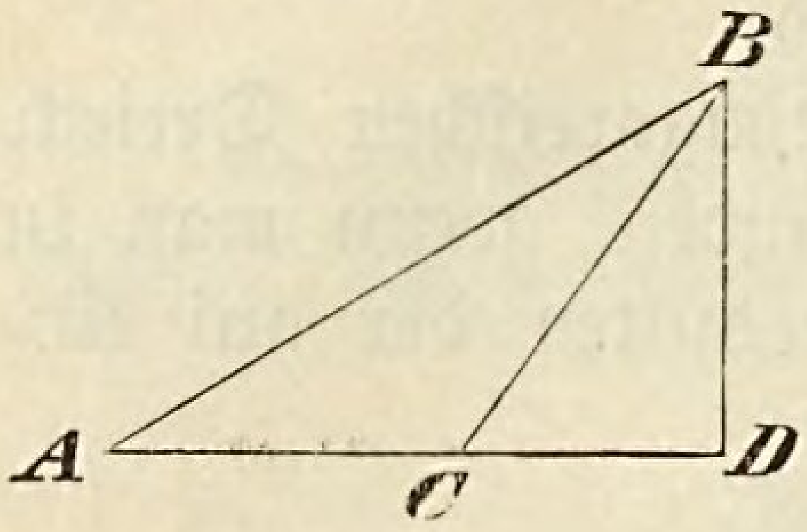
Behauptung. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\, AC . CD$.

Zum Beweise setze man die beiden Werte von BD^2, welche sich durch Anwendung von 156 auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ergeben, einander gleich und eliminiere die Strecke AD.

159.

Lehrsatz. Liegt eine Dreiecksseite einem stumpfen Winkel gegenüber, so ist das Quadrat dieser Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vergrößert Gegenseite eines stumpfen Winkels.

um das doppelte Produkt aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf dieselbe.



Voraussetzung. $\sphericalangle ACB > R$.

Behauptung. $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC.CD$.

Beweis. Man setze die beiden Werte von BD^2 einander gleich.

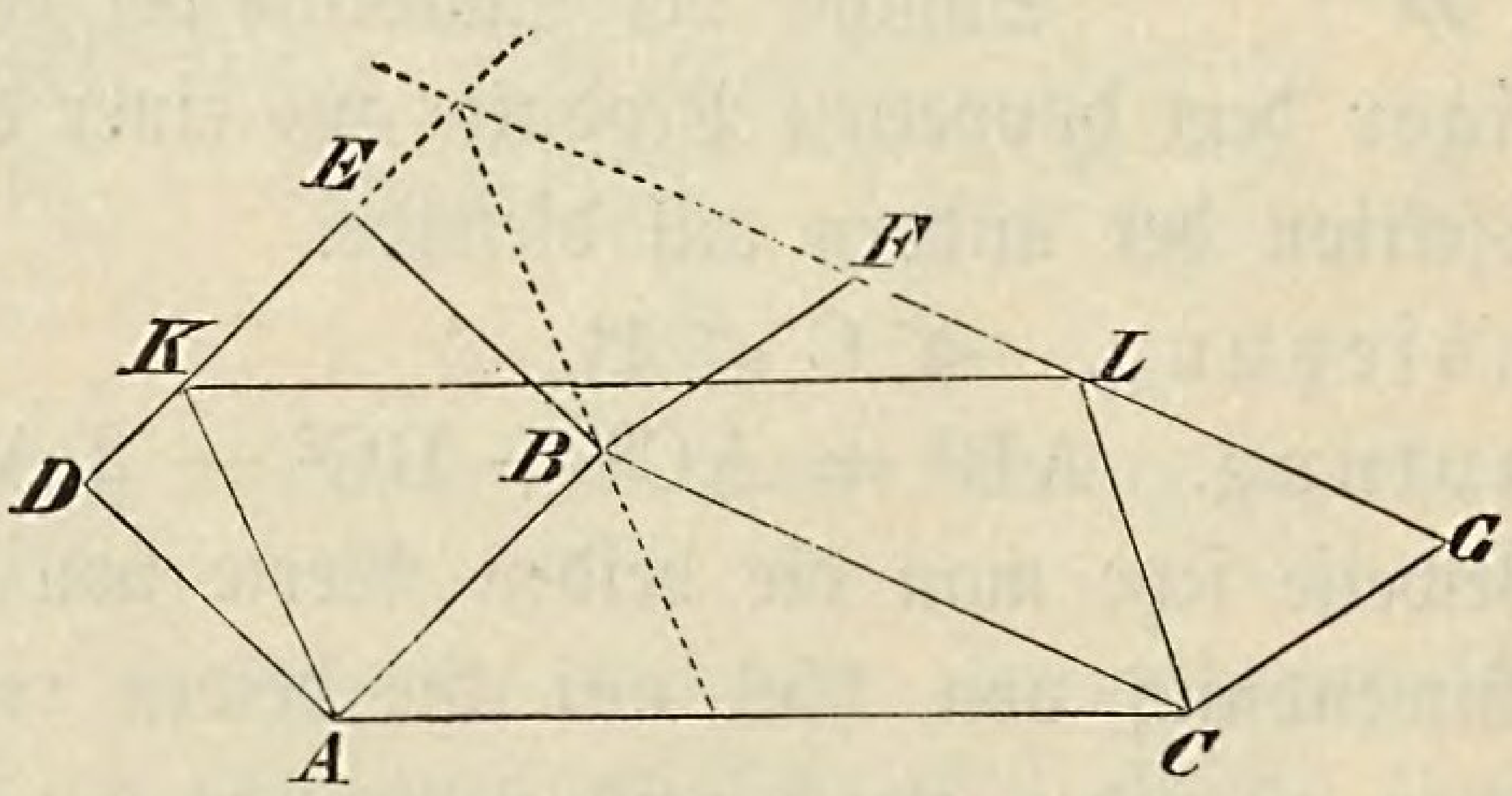
Anmerkung. Gibt man der Projektion der Strecke BC, wenn sie sich vom Fußpunkte der Senkrechten aus nach entgegengesetzten Richtungen erstreckt, verschiedene Vorzeichen, wählt das negative Vorzeichen für den Fall, daß diese Projektion außerhalb des Dreiecks liegt, und bemerkt, daß dieselbe Null ist, wenn BC einem rechten Winkel anliegt, so lassen sich die Sätze 156, 158, 159 in folgender Fassung vereinigen:

Das Quadrat einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Produkte aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe.

Zusatz. Einer Dreiecksseite liegt ein spitzer (rechter) oder stumpfer Winkel gegenüber, je nachdem ihr Quadrat kleiner (ebenso groß) oder größer ist, als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten.

160.

Satz des Pappus. **Lehrsätze.** 1) Errichtet man über zwei Seiten eines Dreiecks beliebige Parallelogramme, verlängert die den Dreiecksseiten gegenüberliegenden Seiten dieser Parallelogramme bis zu ihrem Durchschnitte, zieht durch diesen Schnittpunkt und das nächstliegende



Eck des Dreiecks eine Gerade, durch die beiden anderen Ecken Parallele zu dieser Geraden, so bilden diese (bis zum Durchschnitt mit den äußeren Seiten der Parallelogramme verlängert) die Seiten eines Parallelogramms, welches der Summe der beiden zuerst konstruierten Parallelogramme gleich ist.

Behauptung. AKLC = ADEB + BFGC.

Beweis. Durch zweimalige Anwendung von 139 läßt sich zeigen, daß das über einer Seite des Dreiecks konstruierte Parallelogramm demjenigen Teile des größeren Parallelogramms gleich ist, welcher mit ihm ein Eck gemeinschaftlich hat.

Anmerkung. Dieser Lehrsatz heißt der Satz des Pappus.*) Der pythagoreische Lehrsatz ist ein besonderer Fall desselben.

2) Im gleichschenkligen Dreiecke ist die zum Schenkel gehörige Höhe die mittlere Proportionale zum unteren Abschnitte und dem um den oberen Abschnitt verlängerten Schenkel. Uebungen.

3) Sind a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, m_c die Transversale, welche die Mitte der Seite c mit dem gegenüberliegenden Ecke verbindet, so ist

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{1}{2}c^2 \quad \text{oder} \quad m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Beweis durch 158 und 159.

4) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. 158. 159.

5) In jedem Vierecke ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten, weniger dem Vierfachen des Quadrates der Strecke (v), welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

Beweis. Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen mit den gegenüberliegenden Ecken, so lassen sich die Quadrate dieser vier Verbindungsstrecken zunächst durch die Seiten und Diagonalen ausdrücken. (160 Nr. 3.) Andererseits sind sie Seiten von Dreiecken, welche die Strecke v gemeinschaftlich haben, und deren andere Seiten die Hälften der Diagonalen sind. Wendet man auf diese Dreiecke 158 und 159 an, so erhält man neue Werte für die Quadrate der vier Verbindungsstrecken.

161.

Aufgaben über die Flächenberechnung aus gegebenen Strecken.

Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn die drei Seiten (a, b, c) desselben gegeben sind. Inhalt eines Dreiecks durch die Seiten.

Anleitung. Nachdem man eine beliebige der drei Seiten, z. B. b zur Grundlinie gewählt hat, drückt man die Projektion einer der beiden anderen Seiten auf dieselbe durch die drei

*) Pappus, Mitglied der Akademie zu Alexandria, lebte um 380 n. Chr.

Seiten aus (158), um dadurch das zur Berechnung der Höhe erforderliche Element zu erhalten.

Damit wird die Aufgabe gelöst in der Form

$$F = \tfrac{1}{2} b \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2}.$$

Um die Lösung für numerische Rechnung bequem zu machen, formt man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen durch dreimalige Anwendung der Formel $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ so um, daß keine der Seiten mehr im Quadrate vorkommt, und erhält

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}.$$

Bezeichnet man mit s die halbe Summe der drei Seiten $\left(s = \frac{a + b + c}{2}\right)$, so erhält man die für die Rechnung bequemere Formel

$$F = \sqrt{s (s - a) (s - b (s - c)}.$$

Zusatz 1. Mit der vorstehenden Aufgabe sind zugleich folgende gelöst.

1) Den Inhalt eines Parallelogramms aus zwei anstoßenden Seiten und einer Diagonale zu berechnen.

2) Den Inhalt eines Vierecks aus den vier Seiten und einer Diagonale zu finden.

3) Den Inhalt eines beliebigen Polygons aus den Seiten und den von einem Ecke aus laufenden Diagonalen zu berechnen.

Zusatz 2. Um den Inhalt (T) eines Trapezes aus den vier Seiten [b > und || d, a, c] zu berechnen, bestimmt man die Höhe wie oben aus dem Dreiecke, dessen Seiten a, c, (b—d) sind, und erhält

$$T = \frac{b+d}{4\,(b-d)}\sqrt{[a + (b-d) + c]\,[a + (b-d) - c]\,[a + c - (b-d)]\,[(b-d) + c - a]},$$

Inhalt des Trapezes durch die Seiten.

wobei sich der Ausdruck unter der Wurzel von dem für das Dreieck abgeleiteten nur dadurch unterscheidet, daß b durch (b—d) ersetzt ist.

Führt man wieder die halbe Summe der Seiten ein

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}$$

so wird

$$T = \frac{b+d}{b-d}\sqrt{[s-b]\ [s-d]\ \ [s-(a+d)]\ [s-(c+d]}.$$

Für $d = o$ reduziert sich dieselbe auf die Formel für das Dreieck.

Zusatz 3. Für besondere Fälle tritt eine Vereinfachung des Ausdruckes der Fläche ein. Besondere Fälle.

1) Für das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse h, dessen eine Kathete a ist, wird die

$$\text{Fläche} = \frac{a}{2}\sqrt{(h+a)\ (h-a)}.$$

2) Für das gleichschenklige Dreieck, dessen Basis b und dessen Schenkel c ist, wird die

$$\text{Fläche} = \frac{b}{4}\sqrt{(2c+b)\ (2c-b)}.$$

3) Für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck, dessen Basis (Hypothenuse) b ist, wird die

$$\text{Fläche} = \frac{b^2}{4}.$$

4) Für das gleichseitige Dreieck mit der Seite b ist die

$$\text{Fläche} = \frac{b^2}{4}\sqrt{3}.$$

5) Für das Antiparallelogramm, dessen parallele Seiten $b > d$, und dessen gleiche Seiten a sind, ergibt sich, wenn $\frac{2a+b+d}{2} = s$ ist, die

$$\text{Fläche} = \frac{b+d}{2}\sqrt{(s-b)\ (s-d)}.$$

162.

Übungsaufgaben über Flächenberechnung.*)

1. Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Höhe (h) zu berechnen.

Anmerkung. In dieser und den folgenden Aufgaben ist es für die Übersicht förderlich, die unbekannten Strecken mit den letzten Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen.

*) Diejenigen Aufgaben, welche auf (nicht rein-) quadratische Gleichungen führen, sind mit *) bezeichnet.

1a. Den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks aus der Summe (a) der Höhe und Seite zu berechnen.

2. Den Inhalt eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks aus der zur Hypotenuse gehörigen Höhe (h) zu berechnen.

Den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, von welchem gegeben sind:

3. Eine Kathete (b) und die zur Hypotenuse gehörige Höhe (h).

4. Eine Kathete (b) und ihre Projektion (m) auf die Hypotenuse.

5. Die Höhe (h) und die Projektion (m) einer Kathete.

*) 6. Die Hypotenuse (a) und die Summe (f) der beiden Katheten.

*) 7. Eine Kathete (b) und die Summe (g) der Hypotenuse und der anderen Kathete.

*) 8. Die Höhe (h) und die Summe (f) der beiden Katheten. 156. 154.

9. Die Höhe (h) und der Umfang (l).

Man bestimme die Hypotenuse aus drei Gleichungen (156, 154), indem man für die Summe der Katheten $(x+y)$ zwei Werte entwickelt.

*) 10. Die Summe (f) der beiden Katheten und die Summe (g) einer Kathete und der Hypotenuse.

Den Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn gegeben sind:

11. Die Projektion (p) des einen Schenkels und die Projektion (2q) der Basis auf den andern Schenkel.

12. Die Projektion (2p) der Basis und die Projizierende (k).

13. Die beiden Höhen (h und k).

Den Inhalt eines ungleichseitigen Dreiecks zu berechnen, wenn gegeben sind:

14. Zwei Seiten $(b > c)$ und die Differenz (d) ihrer Projektionen auf die dritte.

15. Zwei Seiten (b, c) und die nach dem Mittelpunkte der einen vom gegenüberliegenden Ecke aus gezogene Transversale (m). (Läßt sich auf 161 zurückführen.)

16. Eine Seite (c), die Summe (f) der beiden andern und die zu einer der letzteren Seiten gehörige Höhe (h).

17. Eine Seite (c), die Differenz (d) der beiden andern und die zur größeren von beiden gehörige Höhe (h).

Den Inhalt eines Parallelogramms zu bestimmen, wenn gegeben sind:

18. Eine Seite (a) und die beiden Diagonalen (e, f).

19. Eine Höhe (h) und die beiden Diagonalen (e, f).

Den Inhalt einer Raute zu berechnen, wenn gegeben sind:

20. Die Seite (a) und eine Diagonale (e).
21. Eine Höhe (h) und eine Diagonale (e).

*) 22. Eine Diagonale (e) und die Summe (g) aus der Seite und der anderen Diagonale.

Den Inhalt eines Trapezes zu berechnen, wenn gegeben sind:

23. Die beiden Parallelen ($b > d$), eine Seite (a) und eine Diagonale (e).
24. Eine der Parallelen (b), die beiden anderen Seiten (a, c) und eine Diagonale (e). [(b − d) durch 156.]
25. Die beiden Parallelen ($b > d$) und die beiden Diagonalen (e, f). 161.
26. Eine der Parallelen (b), die beiden anderen Seiten (a, c) und die Höhe (h). Analog 24.
27. Die beiden Diagonalen (e, f) und die Höhe (h).

Anmerkung. Sind von den n Bestimmungsstücken des Inhalts (n — 1) Stücke und die Größe des Inhalts gegeben, so läßt sich das n^{te} Bestimmungsstück berechnen. In diesem Sinne kann man jede der vorstehenden Aufgaben n mal umkehren.

Dritter Teil.

Die Form der Figuren.

I. Abschnitt.

Proportionen zwischen Dimensionen von Figuren.

163.

Allgemeines über geometrische Proportionen.

Erklärung. Unter einer geometrischen Proportion versteht man eine Gleichung zwischen zwei Quotienten (Brüchen, Verhältnissen). Man schreibt

$$a : b = c : d$$

oder $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und liest: a verhält sich zu b wie c zu d.

Man will damit entweder sagen: b ist so oft in a enthalten als d in c (wenn a mit b, c mit d gleichartig sind), oder: der

b^{te} Teil von a ist dem d^{ten} Teile von c gleich, wenn a mit c gleichartig, b und d aber Zahlen sind.

Die vier Größen a, b, c, d heißen Glieder der Proportion, die Zähler (a und c) Vorderglieder, die Nenner (b und d) Hinterglieder. Jedes Glied heißt zu seinem gleichnamigen, das Vorderglied zum Vordergliede, das Hinterglied zum Hintergliede, homolog.

Außerdem heißen a und d äußere, b und c innere oder mittlere Glieder.

Anmerkung. Wenn im folgenden der Ausdruck gebraucht ist: Es verhalten sich zwei Strecken . . wie zwei andere, oder: die zwei Strecken . . stehen mit zwei anderen in Proportion, so ist damit gemeint, daß die ersten beiden Strecken in der angeführten Ordnung das eine Verhältnis (die eine Seite), die anderen beiden das zweite Verhältnis (die andere Seite) der Proportion bilden.

Das Produkt der mittleren und der äußeren Glieder.

Lehrsätze und Erklärungen. a) In jeder (geometrischen) Proportion ist das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren Glieder gleich.

Voraussetzung. $a : b = c : d$.

Behauptung. $ad = bc$.

Beweis durch Multiplikation der Voraussetzung mit bd.

Zusatz. Ist ein äußeres Glied einer Proportion einem mittleren gleich, so ist auch das zweite äußere Glied dem zweiten mittleren gleich.

Umformungen.

b) Da aus der Gleichung zweier Produkte stets (hier durch Division mit bd) eine richtige Proportion abgeleitet werden kann, so erhält man richtige Proportionen, wenn man eine gegebene Proportion so verändert, daß das Produkt der äußeren Glieder dem Produkte der mittleren gleich bleibt.

Es ist deshalb erlaubt:

1) die mittleren Glieder mit einander zu vertauschen,
2) die äußeren Glieder mit einander zu vertauschen,
3) die äußeren Glieder zu mittleren und dafür die mittleren zu äußeren zu machen.

Hingegen kann man nicht ein einzelnes äußeres Glied mit einem einzelnen mittleren vertauschen.

Ferner erhält man richtige Proportionen, wenn man

4) in einer richtigen Proportion ein äußeres und mittleres Glied zugleich mit gleichen Zahlen multipliziert oder dividiert, und wenn man

5) zwei richtige Proportionen Glied für Glied mit einander multipliziert oder dividiert, jedes Glied mit der nämlichen Zahl potenziert oder radiziert.

c) Ist $a : b = c : d$

richtig, so gilt auch Ableitungen.

1) $(a+b) : b = (c+d) : d$,

2) $(a+b) : a = (c+d) : c$,

3) $(a-b) : b = (c-d) : d$,

4) $(a-b) : a = (c-d) : c$,

5) $(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$.

Beweis. Um 1) bis 4) abzuleiten, addiert oder subtrahiert man 1 auf beiden Seiten der Voraussetzung und wendet b) 1 und Substitution gleicher Verhältnisse wiederholt an; 5) erhält man aus 1) und 3) durch b) 5.

d) Erklärung. Um auszudrücken, daß zugleich Zusammensetzung.

$$a : b = a_1 : b_1$$
$$b : c = b_1 : c_1$$
$$c : . = c_1 : .$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$. \; m \quad . \quad . \; m_1$$
$$m : n = m_1 : n_1$$

schreibt man auch kurz:

$$a : b : c : \ldots\ldots m : n = a_1 : b_1 : c_1 : \ldots\ldots m_1 : n_1$$

Es folgt daraus

$$(a + b + c + \ldots. m + n) : a = (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots. m_1 + n_1) : a_1$$

Beweis. Durch successive Multiplikation der aufgelösten Gleichungen überzeugt man sich, daß

$$\left[\frac{a}{a} = \frac{a_1}{a_1}\right]$$

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{c_1}{a_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{m}{a} = \frac{m_1}{a_1}$$
$$\frac{n}{a} = \frac{n_1}{a_1}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt die Behauptung.

Stetige Proportion.

e) Erklärung. Eine Proportion heißt stetig, wenn die mittleren Glieder einander gleich sind.

Statt
$$a : b = b : c$$
schreibt man auch
$$a : b : c$$

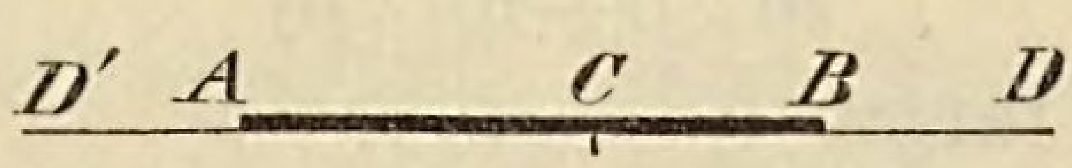
Das mittlere Glied der stetigen (geometrischen) Proportion heißt die mittlere (geometrische) Proportionale zu den beiden äußeren Gliedern.

Aus $a : b : c$ folgt $b^2 = ac$ und umgekehrt kann aus der Gleichung
$$b^2 = ac$$
immer eine stetige Proportion mit b als mittlerem Gliede abgeleitet werden.

164.

Erweiterung des Begriffs der Teilung einer Strecke.

Lehrsatz. Faßt man die Strecke AB als die Entfernung des Punktes B von A auf, dadurch entstanden, daß der Punkt B sich von A aus auf der durch AB bestimmten Geraden bewegt hat und



schließlich in B zur Ruhe gekommen ist, so kann diese schließliche Entfernung AB von A erstens dadurch entstehen, daß der Punkt B nach Zurücklegung der Strecke AC < AB noch den übrigen Weg CB macht. Dann ist C ein Teilpunkt der Strecke AB im gewöhnlichen Sinne und diese Strecke durch Addition der beiden positiven Summanden AC und CB entstanden. Ein solcher Teilpunkt soll im Folgenden ein innerer Teilpunkt und die Abschnitte AC und CB innere (additive) Abschnitte der Strecke AB genannt werden. Zweitens kann AB als schließliche

Entfernung dadurch entstanden sein, daß der Punkt zunächst über die Stelle B hinaus etwa bis D ging, dann von D nach B zurückkehrte, so daß AB die Summe aus dem positiven Summanden AD und dem negativen DB ist [AB = AD + (— BD)] Endlich hätte der Punkt zunächst von A aus in negativer Richtung etwa nach D', und dann von D' nach B gehen können, wodurch sich die Entfernung AB aus dem negativen Summanden AD' und dem positiven D'B gebildet hätte [AB = (— D'A) + D'B].

Man ist übereingekommen, auch die Summanden AD, DB, AD' D'B als Abschnitte der Strecke AB anzusehen und nennt sie äußere (subtraktive) Abschnitte, die Punkte D und D' äußere Teilpunkte der Strecke.

165.

Lage einer Geraden gegen ein Dreieck.

a) Die Gerade ist einer Seite des Dreiecks parallel.

Dann macht sie im Allgemeinen auf den beiden andern Seiten innere oder äußere Abschnitte.

Besondere Fälle sind, daß die Gerade durch das der parallelen Seite gegenüberliegende Eck des Dreiecks geht, oder daß sie die ihr parallele Seite selbst enthält.

In diesen Fällen ist zu bemerken, daß das Dreieck ganz auf einer Seite der Geraden liegt.

b) Die Gerade ist keiner Seite des Dreiecks parallel.

Wir unterscheiden dann, ob die Gerade durch ein Eck des Dreiecks geht oder nicht.

1) Geht die Gerade durch ein Eck, so macht sie auf der gegenüberliegenden Seite entweder innere oder äußere Abschnitte.

Es ist leicht ersichtlich, daß dabei mehrere ausgezeichnete Lagen möglich sind, von denen zum Teil schon früher die Rede war.

2) Geht die Gerade nicht durch ein Eck, so macht sie entweder auf zwei Seiten innere und auf der dritten Seite äußere Abschnitte; oder sie macht auf allen drei Seiten äußere Abschnitte.

Beweis: Da die Gerade die Richtungen der drei Seiten schneiden muß, so sind die beiden übrigen denkbaren Fälle: innere Abschnitte auf einer, äußere auf den beiden andern Sei-

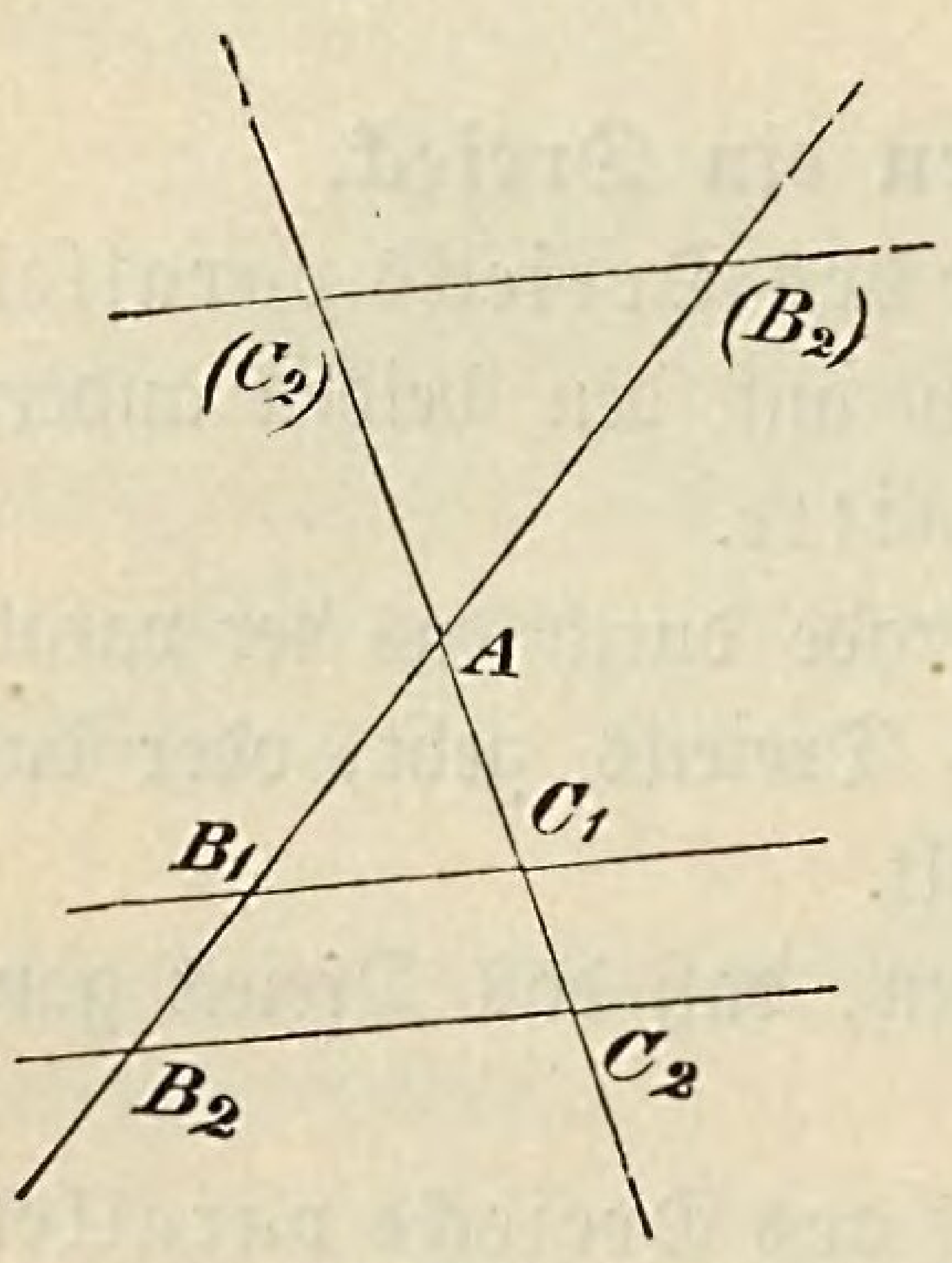
ten — und innere Abschnitte auf den drei Seiten auszuschließen. Der erstere erledigt sich durch 88a, der letztere durch die Bemerkung, daß ein dritter innerer Teilpunkt zwischen den beiden schon geschnittenen Seiten liegen müßte, die schneidende Gerade aber wegen 59 gegen die dritte Seite nicht von beiden Seiten her konvergieren kann.

Folgerungen aus den einzelnen als möglich erkannten Lagen und Bedingungen für das Stattfinden derselben bilden den Inhalt der folgenden Sätze.

166.

Die parallelen Transversalen.

Lehrsätze. Werden zwei Gerade, die sich selbst (im Punkte A) schneiden, von zwei beliebigen Parallelen $B_1\,C_1$ und $B_2\,C_2$ geschnitten, so stehen



a) die vom Scheitel A aus gezählten durch die eine Parallele gemachten Abschnitte mit den durch die andere Parallele gemachten so in Proportion, daß die auf derselben Geraden gemachten Abschnitte die homologen Glieder bilden.

Behauptung: $AB_1 : AC_1 = AB_2 : AC_2$.

Beweis. Da die Dreiecke $AB_1\,C_1$ und $AB_2\,C_2$ die Winkel beziehungsweise gleich haben, so ist 148b anwendbar. (Zweimal.)

b) Es stehen zwei von A aus gezählte, durch eine der Parallelen gemachte Abschnitte mit den zwischen den beiden Parallelen liegenden Abschnitten so in Proportion, daß die auf derselben Geraden liegenden Abschnitte die homologen Glieder bilden.

Behauptung: $AB_1 : AC_1 = B_1\,B_2 : C_1\,C_2$

$AB_2 : AC_2 = B_1\,B_2 : C_1\,C_2$.

Beweis. Der Satz kann durch 163c aus dem unter a vorgetragenen abgeleitet werden.

c) Die zwischen den Schenkeln liegenden beiden Stücke der Parallelen verhalten sich wie die Entfernungen ihrer Endpunkte vom Scheitel (A).

Behauptung: $B_1\,C_1 : B_2\,C_2 = AB_1 : AB_2$

$B_1\,C_1 : B_2\,C_2 = AC_1 : AC_2$.

Beweis. Man wendet entweder 148 b zweimal an, oder zieht durch B_1 eine Parallele zu AC_2 und benützt 166 b u. 61 c.

Anmerkung. In den Proportionen a und b kann man aus arithmetischen Gründen (163 b) auch die auf derselben Geraden liegenden Abschnitte in ein Verhältnis zusammensetzen, dann treten in den homologen Gliedern die von derselben Parallelen gemachten Abschnitte auf.

167.

Lehrsatz. Anwendung auf das Dreieck. Schneidet man zwei Seiten eines Dreiecks durch eine zur dritten Seite parallele Strecke, nennt die geschnittenen Seiten die ganzen Seiten und unterscheidet die Abschnitte als obere und untere

a) so verhalten sich

1) die ganzen Seiten wie ihre oberen Abschnitte [166 a];

2) die ganzen Seiten wie ihre unteren Abschnitte [aus 1) durch 163 c];

3) die oberen Abschnitte wie die unteren [aus 1) und 2)];

b) es verhält sich

α) die ganze Seite zu ihrem oberen Abschnitte, wie die andere ganze Seite zu ihrem oberen Abschnitte [aus a 1)];

β) die ganze Seite zu ihrem unteren Abschnitte, wie die andere ganze Seite zu ihrem unteren Abschnitte, [aus a 2)];

γ) es verhalten sich die Abschnitte der einen Seite wie die gleichliegenden Abschnitte der anderen Seite [aus a 3)];

c) es verhält sich jede ganze Seite zu ihrem oberen Abschnitte wie die dritte Dreiecksseite zu der ihr parallelen Strecke [166 c].

168.

Lehrsatz. Verallgemeinerung. Durchschneidet man eine beliebige Anzahl von Geraden, die alle durch einen Punkt (A) gezogen sind (oder nach demselben konvergieren) mittelst beliebiger Parallelen, und nennt man homologe Stücke zweier Geraden solche Stücke, welche zwischen denselben zwei Parallelen (oder einer Parallelen und A liegen), und homologe Stücke

zweier Parallelen solche Stücke, welche zwischen denselben zwei Geraden liegen, so gilt:

a) Zwei homologe Stücke zweier Geraden verhalten sich wie irgend zwei andere homologe Stücke derselben zwei Geraden;

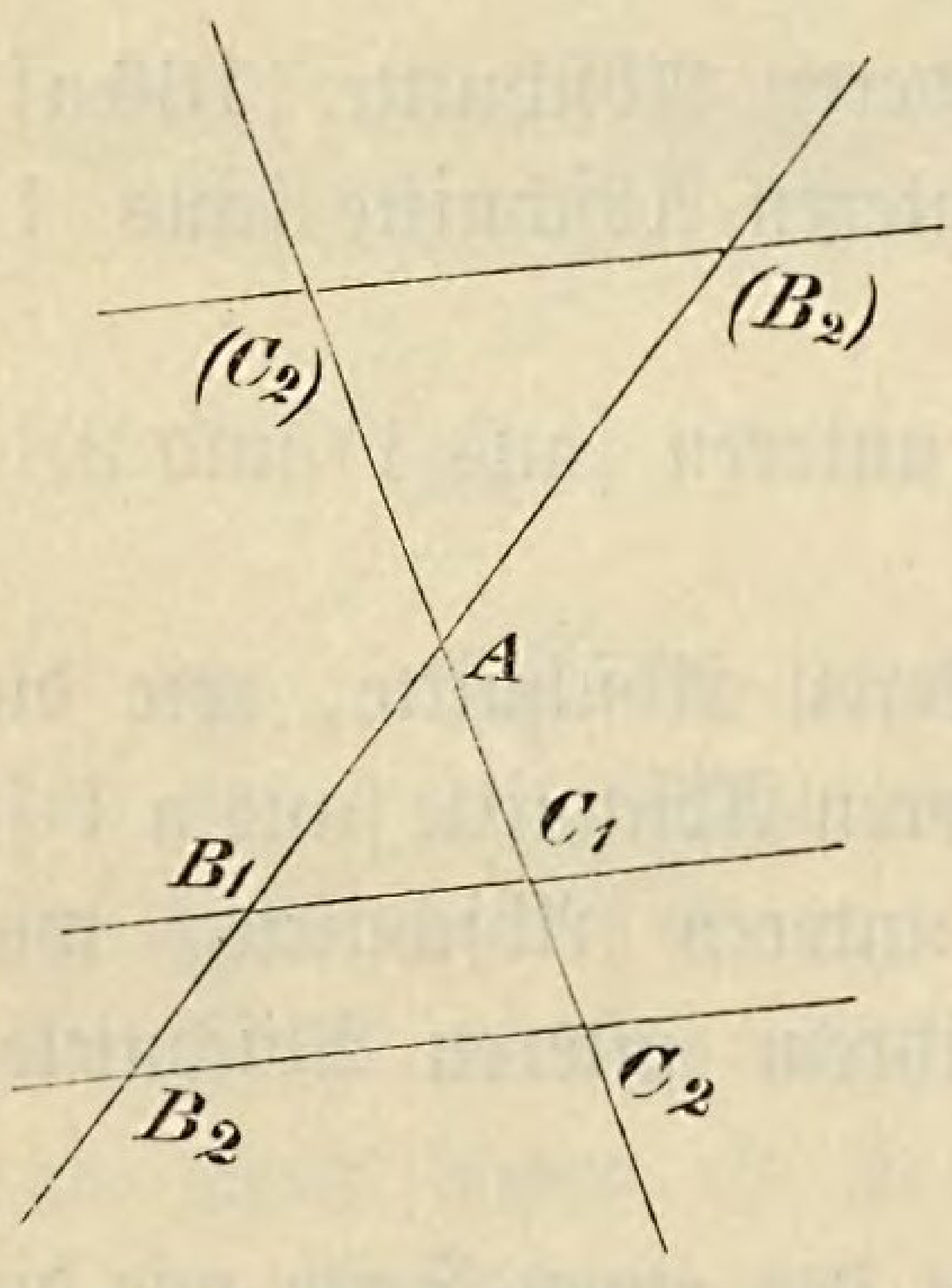
b) Zwei homologe Stücke zweier Parallelen verhalten sich wie irgend zwei andere homologe Stücke derselben zwei Parallelen;

c) Zwei homologe Stücke zweier Parallelen verhalten sich wie die Stücke eines Strahles von A bis zu diesen Parallelen, also auch wie ihre senkrechten Abstände von A.

169.

Der Parallelismus der Transversalen von Proportionen abhängig.

Lehrsätze. a) Machen zwei Gerade $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ auf zwei sich in A schneidenden Geraden solche (von A aus gemessene) Abschnitte, daß zwischen den von der einen gemachten Abschnitten einerseits und den von der andern gemachten andererseits eine Proportion besteht, in welcher die auf derselben Geraden gemachten Abschnitte die homologen Glieder bilden, so sind die Geraden $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ parallel.



Voraussetzung:

$AB_1 : AC_1 = AB_2 : AC_2$.

Behauptung: $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2$.

Beweis. Eine durch B_1 zu $B_2 C_2$ gezogene Parallele schneidet die Gerade AC_2 in C_1, da sich die Entfernung (x) ihres Durchschnittspunktes von A_1 aus der vermöge 166a geltenden Proportion gleich AC_1 berechnet.

b) Die Geraden, ($B_1 C_1$ und $B_2 C_2$) sind auch parallel, wenn sich die durch eine derselben gemachten Abschnitte, wie die zwischen den Geraden liegenden Abschnitte ($B_1 B_2$ und $C_1 C_2$) verhalten, weil sich daraus durch 163c die Voraussetzung des Lehrsatzes a ergibt.

Die Geraden sind aber nicht notwendig parallel, wenn sich ihre eigenen zwischen den Schenkeln liegenden Stücke wie die Abstände zweier Anfangspunkte von A verhalten. Vgl. 74 Anmerkung.

c) Zieht man durch verschiedene Punkte eines Strahles nach einer Seite hin parallele Strecken, welche sich verhalten wie die Entfernungen ihrer Anfangspunkte vom Anfangspunkte des Strahles, so liegen die Endpunkte dieser Strecken in einer Geraden, welche durch den Anfangspunkt des Strahles geht.

Beweis. Man zeige, daß die durch den Anfangspunkt des Strahles und den Endpunkt einer Strecke gezogene Gerade durch den Endpunkt einer beliebigen anderen der parallelen Strecken geht, indem man die Voraussetzung mit 166c verbindet.

Zusatz. Der Satz gilt auch dann noch, wenn man die Anfangspunkte der parallelen Strecken auf zwei Strahlen annimmt, welche von einem Punkte nach entgegengesetzter Richtung gehen. Nur müssen dann diejenigen Strecken, welche auf entgegengesetzten Strahlen anfangen, auch nach entgegengesetzter Richtung gezogen werden.

170.

Lehrsätze. a) Die Gerade, welche einen Winkel des Dreiecks halbiert, teilt die gegenüberliegende Seite in innere Abschnitte, welche sich wie die ihnen anliegenden Dreiecksseiten verhalten. Transversale durch die Ecken.

Beweis. Die beiden Dreiecke, welche entstehen, verhalten sich einerseits wie die Abschnitte (146 Zus. 1), andererseits wie die anliegenden Seiten (148 b). Winkelhalbierungstransversale.

b) Die Gerade, welche einen Außenwinkel des Dreiecks halbiert, macht auf der gegenüberliegenden Seite äußere Abschnitte, welche sich wie die ihnen anliegenden Dreiecksseiten verhalten.

Beweis. Die Halbierungslinie des Außenwinkels (bei C) bildet der Voraussetzung zufolge mit der einen Dreiecksseite (a) das Supplement desjenigen Winkels, den sie mit der anderen Seite (b) bildet, folglich ist auf die Dreiecke, deren gemeinschaftliche Seite die Halbierungslinie ist, 148c anwendbar. Determination!

171.

Lehrsatz. Teilt eine durch ein Eck des Dreiecks gezogene Gerade die Gegenseite in zwei innere oder in zwei äußere Abschnitte, welche sich wie die anliegenden Dreiecksseiten verhalten,

so halbiert die Gerade, den inneren, beziehungsweise den Außenwinkel des Dreiecks.

Beweis. Man zieht die Halbierungslinie des Winkels und zeigt durch Anwendung von 170 und 163c, daß die in der Behauptung genannte Gerade zwei Punkte mit ihr gemeinschaftlich hat.

172.

Lehrsatz. Halbiert man zugleich einen inneren Winkel des Dreiecks und seinen Außenwinkel, so stehen die zwei innern von den auf der Gegenseite gemachten Abschnitten mit den zwei äußeren so in Proportion, daß Abschnitte, welche einen Endpunkt der Seite gemeinschaftlich haben, die homologen Glieder bilden.

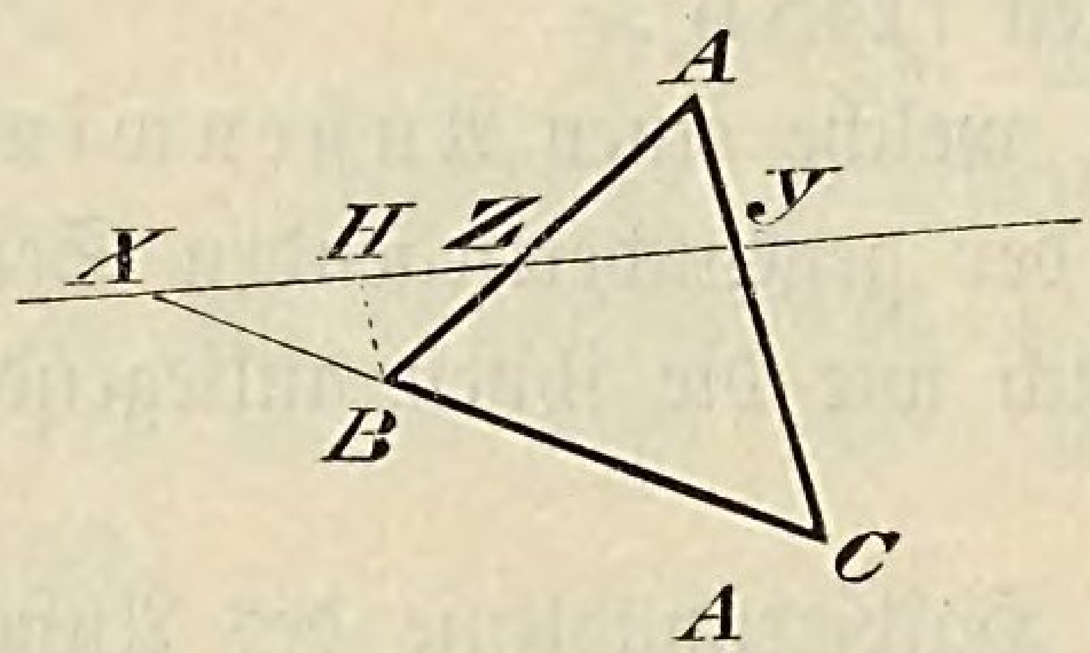
Beweis folgt unmittelbar aus 170.

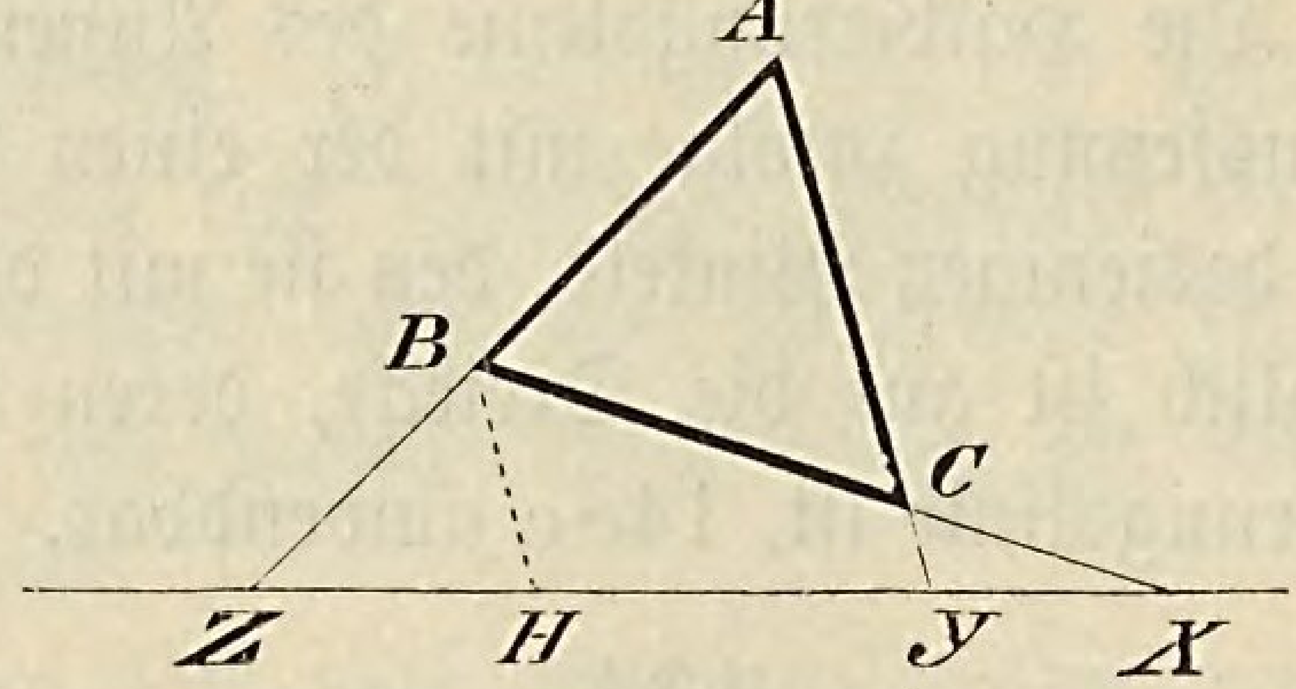
173.

Transversale durch die Seiten.

Lehrsatz. Macht eine Gerade auf zwei Seiten eines Dreiecks innere, auf der dritten äußere Abschnitte, oder macht die Gerade auf den drei Seiten äußere Abschnitte; so ist das Produkt der drei Abschnitte, welche keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben, dem Produkte der drei übrigen Abschnitte gleich. (Die Produkte der überspringenden Abschnitte sind gleich.)

Behauptung. AZ . XB . CY = ZB . XC . YA.





Beweis. Man ziehe durch (den einen Endpunkt der subtraktiv geteilten Strecke) B die zu CA parallele Hilfslinie BH, und wende auf BH || YA, BH || CY 166c an.

174.

Lehrsatz. Sind die drei Seiten eines Dreiecks so geteilt, daß die Produkte der überspringenden Abschnitte gleich sind, und sind

a) zwei Teilpunkte innere, der dritte ein äußerer, oder

b) alle drei Teilpunkte äußere,

so liegen die drei Teilpunkte in gerader Linie.

Beweis. Man zeigt, daß die Verbindungsstrecke zweier Teilpunkte (Y,Z), verlängert, durch den dritten (X) geht. Bezeichnet man zu diesem Zwecke vorläufig mit X' den Punkt, wo YZ die Verlängerung von CB trifft, also mit X'B den von YZ gemachten äußeren Abschnitt der CB, so folgt durch Verbindung der Voraussetzung mit 173:

$$\frac{X'B}{XB} = \frac{X'C}{XC}$$

oder nach 163 b $X'C : X'B = XC : XB$,

woraus $(X'C - X'B) : X'B = (XC - XB) : XB$

da nun $X'C - X'B = BC = XC - XB$,

folgt $X'B = XB$.

Somit ist erwiesen, daß der Punkt X, indem er mit X' zusammenfällt, in der Geraden YZ liegt.

175.

Lehrsatz. Schneiden sich drei durch die drei Ecken eines Dreiecks gehende Gerade in einem Punkte (innerhalb oder außerhalb des Dreiecks), so werden die gegenüber liegenden Seiten jede so in zwei (innere oder äußere) Abschnitte zerlegt, daß das Produkt aus drei Abschnitten, die keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben, dem Produkte der drei übrigen gleich ist. (Die Produkte der überspringenden Abschnitte sind gleich.) Drei Ecken-Transversale durch einen Punkt.

Beweis. Eine der Geraden teilt das gegebene Dreieck in zwei Dreiecke, deren Seiten durch die beiden anderen Geraden im Sinne von 173 geteilt sind.

Anmerkung. Hier sind immer entweder alle drei Seiten in innere oder eine Seite in innere, die beiden andern in äußere Abschnitte geteilt.

176.

Lehrsatz. Ist jede Seite eines Dreiecks in zwei Abschnitte so geteilt, daß das Produkt aus drei Abschnitten, die keinen Endpunkt gemeinschaftlich haben, dem Produkte der drei übrigen gleich ist, und sind

a) die drei Teilpunkte innere, oder

b) ein Teilpunkt ein innerer, die beiden anderen äußere; so schneiden sich die Geraden, welche die Teilpunkte der Seiten mit den gegenüber liegenden Ecken verbinden, in einem Punkte.

Beweis. Man zeigt durch Verbindung der Voraussetzung mit 175, daß die durch den Schnittpunkt zweier Transversalen und das dritte Eck gezogene Gerade in den dritten Teilpunkt treffen muß. Die Entfernung ihres Schnittpunktes von einem Endpunkte der geschnittenen Seite ist der Entfernung des dritten Teilpunktes von demselben Endpunkte gleich.

Anmerkung. Die Sätze in 56 und 57 sind besondere Fälle dieses allgemeinen Lehrsatzes und lassen sich auf denselben zurückführen.

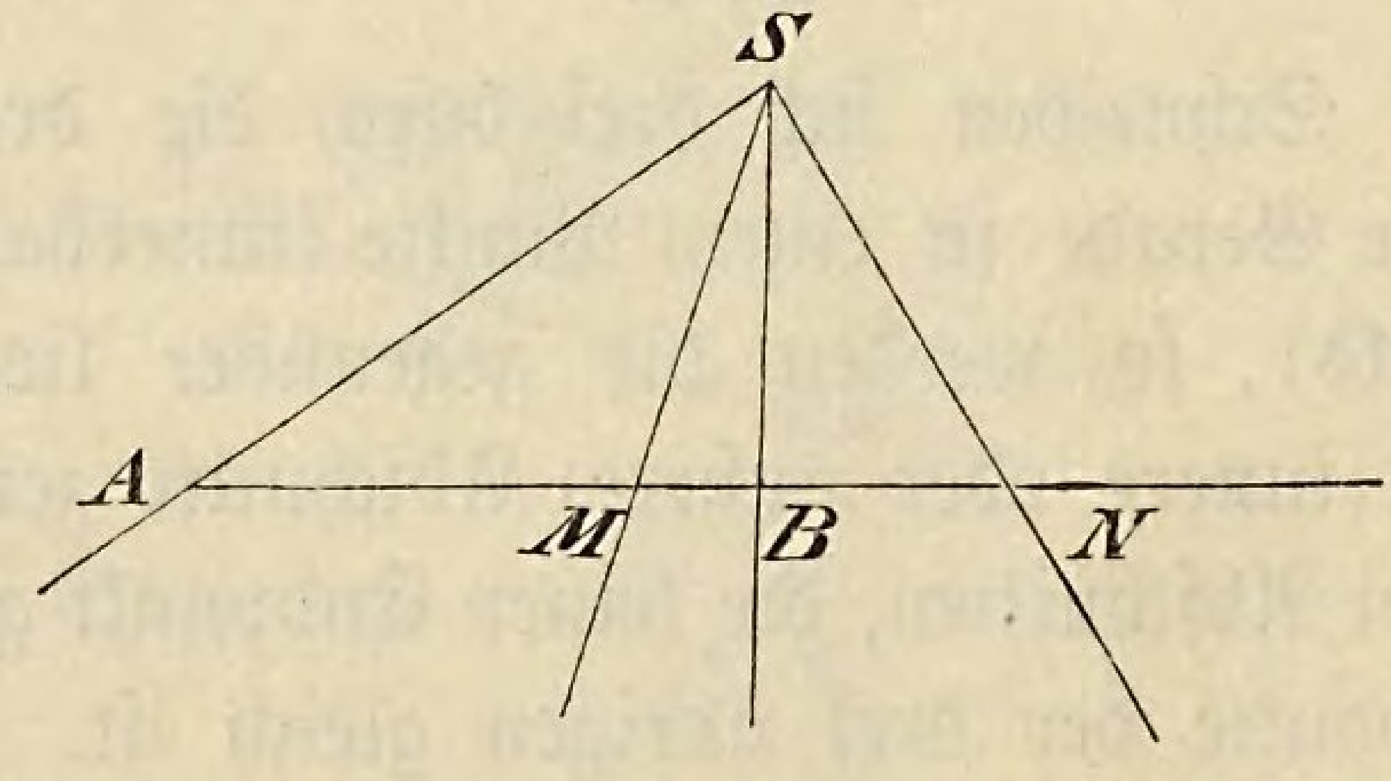
177.

Harmonische Teilung. N. G.

Erklärungen. a) Ist eine Strecke AB (s. Fig.) durch zwei Punkte M und N so in innere und äußere Abschnitte geteilt, daß die inneren Abschnitte sich wie die äußeren verhalten:

$$AM : MB = AN : NB,$$

so heißt die Strecke AB in M und N harmonisch geteilt,



und die Punkte A, B, M N heißen vier harmonische Punkte. Die beiden Endpunkte A und B der Strecken und ebenso die beiden Teilpunkte M und N heißen konjugierte oder zugeordnete harmonische Punkte.

Zusatz 1. Ist die Strecke AB in M und N harmonisch geteilt, so ist auch die Strecke MN in B und A harmonisch geteilt, d. h. die von konjugierten harmonischen Punkten begrenzten Strecken sind zugleich harmonisch geteilt.

Zusatz 2. a) Man sagt auch von einer Geraden, sie sei harmonisch geteilt, wenn auf ihr vier harmonische Punkte liegen. b) Nimmt man außerhalb einer Geraden einen beliebigen Punkt an und zieht von demselben Strahlen durch vier harmonische Punkte, so heißen diese Strahlen harmonische Strahlen und diejenigen derselben, welche durch konjugierte Punkte gehen, konjugierte (harmonische) Strahlen.

Beispiel. Die Schenkel eines beliebigen Winkels, die Halbierungslinie desselben und die Halbierungslinie seines Nebenwinkels sind vier harmonische Strahlen. (172.)

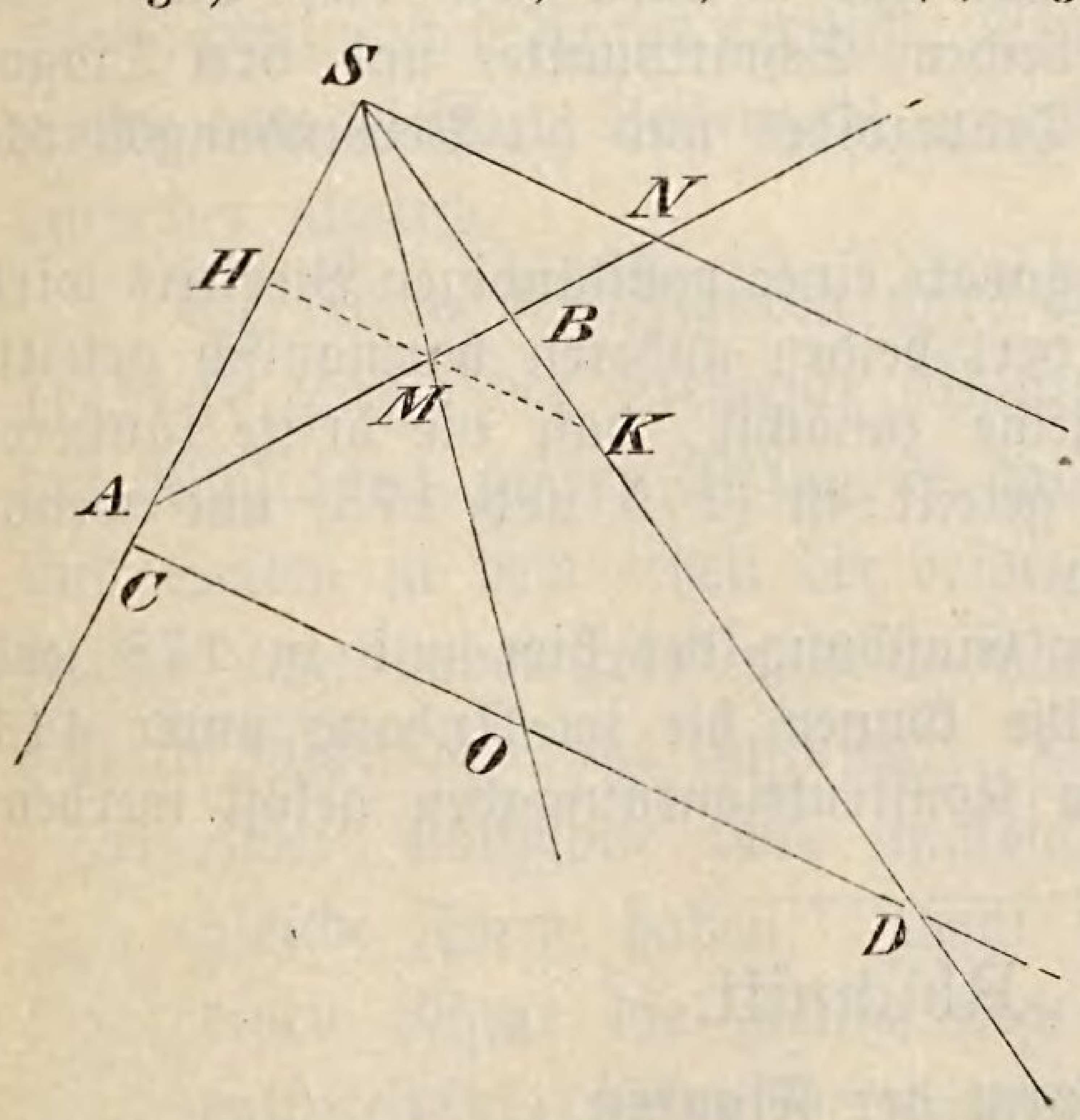
Anmerkung. Der Begriff der harmonischen Strahlen erstreckt sich auch auf den Fall, in welchem die durch vier harmonische Punkte gezogenen Geraden parallel sind (der Ausgangspunkt unendlich entfernt liegt).

178.

Lehrsätze. a) Jede durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite (Grundlinie) gezogene Gerade wird durch diesen Punkt, die Richtungen der beiden anderen Seiten und die durch die Spitze zur Grundlinie gezogene Parallele harmonisch geteilt. Der Mittelpunkt einer Strecke als innerer harmonischer Teilpunkt. N. G.

Beweis durch zweimalige Anwendung von 166c.

b) Ist irgend eine Gerade durch vier von einem Punkte ausgehende Strahlen harmonisch geteilt, und man zieht zu einem äußeren Strahle eine Parallele, so schneiden die drei übrigen Strahlen auf der Parallelen zwei gleich große Strecken ab.



Sei AB die von S aus in M und N harmonisch geteilte Strecke, so ist

Voraussetzung:
AM : MB = AN : NB
CD || SN

Behauptung:
CO = OD.

Beweis. Man ziehe durch den zu N konjugierten Punkt M eine Parallele (HK) zu CD, so ist CO = OD, wenn HM = MK (167bβ). Letzteres folgt aber, wenn man HM || SN, MK || SN beachtet und 166c anwendet.

c) Stehen von vier harmonischen Strahlen zwei konjugierte aufeinander senkrecht, so halbiert der mittlere derselben den

Winkel der beiden andern (konjugierten) Strahlen, der äußere den Nebenwinkel desselben. (Umkehrung von 172.)

Beweis. Man ziehe durch irgend einen Punkt (M) des mittleren Strahles der Voraussetzung eine Parallele zum konjugierten, so ist diese nach 178b in M halbiert. 37β. $53b_2$. 26α.

Anmerkung. Die Lehrsätze a) und b), welche sich auf einen Grenzfall der harmonischen Teilung beziehen, können als Vorbereitung des folgenden Satzes gelten.

179.

Lehrsatz. Wird durch vier von einem Punkte ausgehende Strahlen eine Gerade harmonisch geteilt, so wird jede Gerade (g) harmonisch geteilt, welche die vier Strahlen schneidet.

Beweis. Man denke sich durch einen inneren Teilpunkt (M) der in der Behauptung genannten Geraden (g) eine Parallele zum konjugierten harmonischen Strahle gezogen, so wird diese nach 178b im Punkte M halbiert. Somit wird 178a anwendbar, wornach g durch die gegebenen vier Strahlen harmonisch geteilt ist.

180.

Das vollständige Vierseit. N. G.

Erklärung. Verlängert man die gegenüberliegenden Seiten eines Trapezoides bis zu ihren Durchschnittspunkten, so entsteht eine Figur, welche aus dem Trapezoide und zwei Dreiecken zusammengesetzt ist und ein vollständiges Vierseit heißt. Das vollständige Vierseit hat 6 Ecken (die vier Ecken des Trapezoides und die beiden Schnittpunkte) und drei Diagonalen (die beiden des Trapezoides und die Verbindungsstrecke der Schnittpunkte).

Lehrsatz. Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die (Richtungen der) beiden anderen harmonisch geteilt.

Beweis. Man zeige zunächst, daß die dritte (äußere) Diagonale harmonisch geteilt ist (175 und 173) und wende dann zweimal 179 an.

Anmerkung. Zur Einübung der hier und in 178 und 179 vorgetragenen Sätze können die im Anhang unter 411 und 411c aufgeführten Konstruktionsaufgaben gelöst werden.

II. Abschnitt.

Die Form der Figuren.

181.

Erklärung. Um auszudrücken, daß Figuren gleiche Form haben, sagt man von ihnen, sie sind einander ähnlich, und setzt zwischen ihre Bezeichnung das Zeichen $\backsim$ (similis).

Kongruente Figuren haben gleiche Form; es können aber Figuren ähnlich sein, ohne zugleich kongruent zu sein, das heißt, ohne auch gleiche Größe zu haben.

Es ist also die Form einer Figur von ihrer Größe ganz unabhängig zu denken, so also, daß zwei Figuren bei jedem beliebigen Größenverhältnisse ähnlich sein können, und daß zwei ähnliche Figuren, ohne daß sie aufhören, ähnlich zu sein, in jedes beliebige Größenverhältnis gebracht werden können.

Daraus folgt: wenn zwei Figuren f und F einander ähnlich sind, und ich ändere f so, daß seine Form beibehalten und blos seine Größe so geändert wird, daß sie gleich F wird, so ist die neu entstandene Figur $F' \cong F$, denn F' hat mit F nun Form und Größe gemeinsam.

Und umgekehrt: wenn zwei Figuren f und F so definiert sind, daß die eine, mit Beibehaltung dieser Definition, durch Änderung der Bestimmungsstücke der Größe der anderen nicht gleich gemacht werden kann, ohne daß sie ihr zugleich kongruent wird, so sind f und F einander ähnlich.

Es ist somit eine Figur, welche durch eine Dimension vollkommen bestimmt ist, jeder anderen mit ihr in derselben Weise bestimmten Figur ähnlich. Somit sind reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl einander ähnlich, und alle Kreise einander ähnlich.

Die Form der Figuren wird bestimmt durch die gegenseitige Lage der Elemente (Punkte und Linien); deshalb ist die Ähnlichkeit zweier Polygone dadurch bedingt, daß die Ecken und Seiten in dem einen der beiden Polygone die gleiche gegenseitige Lage haben wie in dem anderen. Diese Bedingung läßt sich in folgende Sätze auflösen.

a) Zwei Polygone von ungleicher Eckenzahl können nicht gleiche Form haben. Denn wenn sämtliche n Ecken der einen Figur die gleiche gegenseitige Lage haben wie n entsprechende Ecken der andern Figur, so bleibt in der andern Figur (die mehr Ecken hat) wenigstens noch ein Eck übrig; dieses Eck hat selbst noch eine gewisse Lage gegenüber den andern Punkten, trägt also zur Bestimmung der Form noch etwas bei, was der ersten Figur

fehlt; deshalb kann die zweite Figur nicht ähnlich der ersten sein.

b) Die gegenseitige Lage zweier Geraden wird bestimmt durch ihren Winkel. Sollen demnach zwei Polygone einander ähnlich sein, so müssen alle Geraden der einen Figur die gleiche gegenseitige Lage haben, wie entsprechende Gerade der anderen Figur; also müssen die Winkel zwischen je zwei Geraden der einen Figur gleich sein den Winkeln zwischen den entsprechenden Geraden der anderen Figur.

c) Die gegenseitige Lage von drei oder mehreren Punkten wird im Allgemeinen bestimmt, teils durch die gegenseitige Lage von Geraden, welche durch die Punkte gezogen sind (b), teils durch das Verhältnis ihrer Entfernungen. Sollen also zwei Figuren ähnlich sein, so muß jedes Paar Strecken der einen Figur dasselbe Verhältnis haben, wie das entsprechende Paar Strecken der anderen Figur.

Diesen Forderungen wird genügt, wenn man definiert: Zwei Polygone (von gleicher Seitenzahl) sind ähnlich, wenn sie die Winkel, welche von einem Ecke aus in einem bestimmten Sinne der Drehung auf einander folgen, der Ordnung nach gleich haben und wenn zugleich die von jenem Ecke aus in demselben Sinne der Drehung auf einander folgenden Seiten in dem einen Polygon dieselben Verhältnisse haben wie im andern.

Beweis. Es ist erstlich zu zeigen, daß es Polygone gibt, welche den aufgestellten Bedingungen genügen, und zweitens, daß sie dabei nicht kongruent sind.

1. Zieht man von einem Ecke eines Polygons aus alle möglichen Diagonalen und durch einen beliebigen Punkt (P) einer (dem Eck) anliegenden Seite eine Parallele zur nächsten Polygonseite, durch deren Schnittpunkt mit der ersten Diagonale eine Parallele zur dritten Seite u. s. f., so erfüllt das von den Parallelen abgegrenzte Polygon den Lehrsätzen in 32 Z. und 166 gemäß alle obigen Bedingungen der Ähnlichkeit.

2. Da der gewählte Punkt (P) beliebig ist, so gibt es unendlich viele verschiedene Polygone, welche dem gegebenen ähnlich sind und doch an Größe verschieden, also nicht kongruent sind.

Anmerkung. Ecken ähnlicher Polygone, welchen die in der Definition verlangte Lage zukommt, werden im Folgenden homologe Ecken genannt. Homologe Ecken sind Scheitel gleicher Winkel, aber die Scheitel zweier gleicher Winkel sind nicht notwendig homologe Ecken. Zwei Seiten ähnlicher Polygone, denen von zwei homologen Ecken aus, im vorausgesetzten Sinne der Drehung herum gezählt, gleiche Ordnungszahlen zukommen, stehen in homologen Gliedern der Proportion und heißen deshalb homologe Seiten.

182.

Lehrsatz. Sind zwei Polygone P_1 und P_2 einem dritten Polygone P_3 ähnlich, so sind sie auch unter sich ähnlich. Zwei Polygone einem dritten ähnlich.

Voraussetzung. $P_1 \backsim P_3$

$P_2 \backsim P_3$

Behauptung. $P_1 \backsim P_2$

Beweis. Die Gleichheit der Winkel in P_1 und P_2 folgt sofort durch 5. Bezeichnet man ferner mit a_1, b_1, c_1 .... die auf einander folgenden Seiten des Polygons P_1, und gelten analoge Bezeichnungen für die Seiten der Polygone P_2 und P_3, so gilt der Voraussetzung gemäß:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_3}{b_3}, \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_3}{c_3} \ldots\ldots$$

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} \ldots\ldots$$

daher nach 5) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} \ldots\ldots$

oder mit Rücksicht auf die in 163d erklärte Schreibweise

$$a_1 : b_1 : c_1 \ldots\ldots = a_2 : b_2 : c_2 \ldots\ldots$$

183.

Lehrsatz. Zieht man zu einer Seite des Dreiecks eine Parallele (welche auf den beiden andern Seiten innere oder äußere Abschnitte macht,) so ist das abgeschnittene Dreieck dem ganzen Dreiecke ähnlich. Die parallele Transversale schneidet ein ähnliches Dreieck ab.

Beweis durch 166 und 32 Zus.

184.

I **Erster Ähnlichkeitsfall.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ein Winkel des einen Dreiecks einem Winkel des andern gleich ist, und die diesen Winkel in dem einen Dreieck einschließenden Seiten sich verhalten wie die beiden ihn einschließenden Seiten des anderen Dreiecks.

Es sollen $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die beiden Dreiecke sein, A_1, B_1, C_1 die Winkel, a_1, b_1, c_1 die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks $\triangle_1$, während die Zeichen A_2, B_2, C_2; a_2, b_2, c_2 analoge Bedeutung für das Dreieck $\triangle_2$ haben.

Voraussetzung. $A_1 = A_2$,

$$b_1 : c_1 = b_2 : c_2.$$

Behauptung. $\triangle_1 \sim \triangle_2$

Beweis. Zunächst könnten die Seiten b_1 und b_2 gleich sein, dann wäre $\triangle_1 \cong \triangle_2$ (48) also auch $\triangle_1 \sim \triangle_2$. Ist $b_1 \gtrless b_2$, so trage man die eine von beiden (etwa b_2) auf der anderen (b_1) vom Scheitel A_1 aus ab und ziehe durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke eine Parallele zu a_1, so ist zunächst das durch die Parallele abgeschnittene Dreieck ($\triangle$ mit den Seiten a, b, c) dem $\triangle_1$ ähnlich (183).

Eben dieses Dreieck ist aber zugleich dem $\triangle_2$ kongruent. Denn da $A_1 = A_2$, die eine der einschließenden Seiten (b) durch Konstruktion gleich b_2, so fehlt nur noch der Nachweis, daß die zweite einschließende Seite (c) der Seite c_2 gleich ist.

Es gilt aber wegen $\triangle \sim \triangle_1$

$$b : c = b_1 : c_1$$

und nach der Voraussetzung $\underline{b_1 : c_1 = b_2 : c_2,}$

daher $b : c = b_2 : c_2$;

und da $b = b_2$,

folgt $c = c_2$.

Nun ist $\triangle \sim \triangle_1$

$$\underline{\triangle \cong \triangle_2}$$

somit $\triangle_1 \sim \triangle_2$ (4).

Zusatz. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn die Katheten des einen Dreiecks sich verhalten wie die Katheten des andern.

185.

Zweiter Ähnlichkeitsfall. Zwei Dreiecke sind ähnlich, II.
wenn zwei Winkel des einen Dreiecks zwei Winkeln des anderen beziehungsweise gleich sind.

Beweis. Man konstruiert wie in 184. Die Kongruenz des konstruierten Dreiecks $\triangle$ mit dem gegebenen $\triangle_2$ folgt wegen $b = b_2$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_2$ u. s. w. aus 49.

Zusatz 1. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen an der Grundlinie oder den an der Spitze liegenden Winkel gleich haben.

Zusatz 2. Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen spitzen Winkel gleich haben.

Zusatz 3. Fällt man im rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so sind die beiden entstandenen Dreiecke unter sich und dem ganzen Dreiecke ähnlich.

186.

Dritter Ähnlichkeitsfall. Zwei Dreiecke sind ähnlich, III.
wenn die drei Seiten des einen Dreiecks sich zu einander verhalten, wie die drei Seiten des anderen.

Voraussetzung. $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$.

Beweis. Man konstruiert wie in 184. Die Kongruenz ergibt sich aus dem konstruierten $b = b_2$ und den Gleichungen

$$c = c_2,$$
$$a = a_2,$$

von welchen jede durch Vergleichung zweier Proportionen abgeleitet wird. Vgl. 184.

Zusatz. Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, wenn das Verhältnis der Grundlinie zum Schenkel in beiden gleich groß ist.

187.

Vierter Ähnlichkeitsfall. Zwei Dreiecke sind ähnlich, IV.
wenn ein Winkel des einen Dreiecks einem Winkel des anderen gleich ist, wenn zugleich zwei diesen Winkel nicht einschließende Seiten des einen Dreiecks sich ebenso verhalten wie zwei ihn nicht einschließende des andern, und überdies die beiden andern

Winkel, welche proportionierten Seiten gegenüber liegen, zusammen größer oder kleiner sind, wie 2 R.

Voraussetzung. $A_1 = A_2$

$b_1 : a_1 = b_2 : a_2$

$B_1 + B_2 \gtrless 2$ R.

Beweis durch die Konstruktion in 184 und den Kongruenzfall (IV) in 51.

Zusatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn das Verhältnis der Hypotenuse zu einer Kathete in beiden gleich groß ist.

188.

Anmerkungen zu den Ähnlichkeitsfällen.

Bestimmungsstücke der Form des Dreiecks.

a) Die Form eines Dreiecks ist bestimmt:

1. Durch einen Winkel und das Verhältnis der denselben einschließenden Seiten;
2. durch zwei Winkel:
3. durch die beiden Verhältnisse, in welchen eine Seite zu den beiden anderen steht;
4. durch einen Winkel und das Verhältnis der gegenüberliegenden Seite zu einer anliegenden, sobald noch bekannt ist, ob der der anliegenden Seite gegenüber liegende Winkel spitz oder stumpf ist.

Homologe Seiten des Dreiecks.

b) Ist die Ähnlichkeit zweier Dreiecke erwiesen, so ist bekannt, daß jeder Winkel und jedes Seitenverhältnis des einen Dreiecks einem Winkel oder Seitenverhältnisse des anderen Dreiecks gleich ist, und es ergibt sich, daß die homologen Glieder der Proportionen gleichen Winkeln gegenüber liegen. Deßhalb sind Seiten ähnlicher Dreiecke, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen, homologe Seiten und die Scheitel dieser gleichen Winkel homologe Ecken.

Symmetrielage.

c) Ähnliche Dreiecke können symmetrisch in der Ebene liegen. Dieses ist der Fall, wenn die Scheitel der gleichen Winkel in beiden Dreiecken nicht im nämlichen Sinne der Drehung auf einander folgen. Ein dem Dreiecke $\triangle_1$ ähnliches, symmetrisches Dreieck erhält man, wenn man die Seiten des Dreiecks $\triangle_1$ über ein Eck hinaus verlängert und die Verlängerungen durch eine zur Gegenseite Parallele schneidet.

189.

Lehrsätze. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich Homologe Transversalen.
a) zwei zu homologen Seiten gehörige Höhen,
b) zwei Mittelpunktstransversalen homologer Seiten,
c) zwei Halbierungslinien gleicher Winkel

wie zwei homologe Seiten der Dreiecke und auch wie zwei andere der genannten Transversalen, die homologe Seiten teilen.

Die Beweise ergeben sich aus der Ähnlichkeit der durch die Transversalen abgeschnittenen Dreiecke.

Verallgemeinerung. Dieselbe Behauptung gilt von allen homologen Transversalen. Homolog sind Transversalen, die von homologen Punkten ausgehen und entweder zu homologen Punkten führen, oder mit homologen Seiten gleiche Winkel in gleichem Sinne der Drehung bilden. Homologe Punkte sind hiebei: 1. Homologe Ecken, 2. Teilpunkte zweier homologer Seiten (oder Transversalen), durch welche diese Seiten in gleichem Verhältnisse geteilt sind; z. B. C_1 und C_2 sind homologe Punkte auf den Seiten $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$, wenn $A_1 C_1 : C_1 B_1 = A_2 C_2 : C_2 B_2$.

190.

Lehrsatz. Die Perimeter ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie zwei homologe Seiten oder Transversalen. Verhältnis der Perimeter ähnlicher Dreiecke.

Beweis. Die Ähnlichkeit gibt

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2,$$

woraus nach 163d folgt:

$$(a_1 + b_1 + c_1) : a_1 = (a_2 + b_2 + c_2) : a_2.$$

Das Übrige nach 163b und 189.

191.

Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Transversalen. Verhältnis der Flächen.

Beweis. Aus 148b hat man wegen $\sphericalangle C_1 = C_2$,

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}.$$

Aus $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$

$$\text{folgt } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

durch Substitution

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}.$$

Das Übrige nach 189.

192.

Ähnlichkeit der Parallelogramme.

Lehrsätze. Zwei Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich haben, und wenn die den Winkel einschließenden Seiten in einem Parallelogramme sich verhalten wie im andern.

Beweis. Man ziehe in dem einen Parallelogramme durch den Scheitel des gleichen Winkels die Diagonale, trage eine Seite des anderen auf der homologen des ersteren ab, durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke ziehe eine Parallele und eine zweite Parallele durch den Schnittpunkt dieser und der Diagonale. Das so konstruierte Parallelogramm ist dem einen ähnlich und dem anderen kongruent.

Zusatz 1. Zwei Rechtecke sind ähnlich,

a) wenn zwei anliegende Seiten des einen Rechtecks sich wie zwei anliegende Seiten des anderen verhalten;
b) wenn die Diagonalen in dem einen Rechtecke den gleichen Winkel mit einander oder mit einer Seite bilden wie im anderen.

Zusatz 2. Zwei Rauten sind ähnlich,

a) wenn sie einen Winkel gleich haben;
b) wenn die Diagonalen der einen Raute sich verhalten wie die Diagonalen der anderen.

193.

Ähnlichkeitsfälle der Polygone.

Lehrsatz. Zwei n-Ecke sind ähnlich,

a) wenn (n — 1) aufeinanderfolgende Seiten des einen Polygons sich verhalten wie (n — 1) auf einander folgende Seiten des anderen, und zugleich die (n — 2) von diesen Seiten gebildeten Winkel in dem einen Polygone der Ordnung nach ebenso groß sind, wie im anderen;

b) wenn (n — 1) Winkel (also alle Winkel) des einen Polygons (n — 1) Winkeln des anderen der Ordnung nach gleich und wenn zugleich (n — 2) auf einander folgende Seiten des einen Polygons sich verhalten wie die (n — 2) gleichliegenden Seiten des anderen.

Beweis. Man ziehe von einem Ecke des einen Polygons aus alle möglichen Diagonalen, trage eine dem homologen Ecke anliegende Seite des andern Polygons auf der ihr homologen Seite des ersteren ab, ziehe durch den Endpunkt der abgetragenen Strecke eine Parallele zur zweiten Seite, durch den Schnittpunkt dieser Parallelen und der ersten Diagonale eine Parallele zur dritten Seite u. s. f., so erhält man ein Polygon, welches dem ersten ähnlich, und dem zweiten kongruent ist. 181. 84. 85.

194.

Lehrsatz. Ähnliche Polygone werden durch die von homologen Ecken aus gezogenen Diagonalen in ähnliche Dreiecke geteilt. Zerlegung ähnlicher Polygone.

Beweis. Die Ähnlichkeit der von zwei Seiten und einer Diagonale gebildeten Dreiecke erhellt sofort aus 184. Für die beiden anstoßenden, von einer Seite und zwei Diagonalen gebildeten Dreiecke kann derselbe Ähnlichkeitsfall durch Benützung der schon erwiesenen Ähnlichkeit der vorausgehenden Dreiecke hergestellt werden.

Zusatz. In ähnlichen Polygonen verhalten sich zwei Diagonalen, die homologe Ecken verbinden, wie zwei homologe Seiten oder wie zwei andere solche Diagonalen.

195.

Lehrsatz. Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei homologe Seiten oder Diagonalen. Verhältnis der Perimeter.

Beweis. Aus der Voraussetzung

$$a_1 : b_1 : c_1 : d_1 \ldots\ldots = a_2 : b_2 : c_2 : d_2 \ldots\ldots$$

leitet man durch 163b ab

$$(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + \ldots\ldots) : a_1 = (a_2 + b_2 + c_2 + d_2 + \ldots\ldots) : a_2$$

und durch Vertauschung der mittleren Glieder die Behauptung 194 Zus.

196.

Lehrsatz. Die Flächen ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder Diagonalen. Die Flächen ähnlicher Polygone.

Beweis. Teilt man nach 194 die beiden Polygone P_1

und P_2 in die ähnlichen Dreiecke $\triangle_1, \triangle_1', \triangle_1'' \ldots\ldots \triangle_2, \triangle_2', \triangle_2'' \ldots\ldots$ so gilt nach 191

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}$$

$$\frac{\triangle_1'}{\triangle_2'} = \frac{c_1^2}{c_2^2}$$

$$\frac{\triangle_1''}{\triangle_2''} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

. . . . . .

die rechtsstehenden Verhältnisse kann man alle durch $\frac{a_1^2}{a_2^2} \left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)$ oder durch das Verhältnis der Quadrate zweier Diagonalen ersetzen, weil man nach 163b · 5) eine richtige Proportion erhält, wenn man alle Glieder einer solchen mit derselben Zahl (2) potenziert. Nachdem diese Substitution gemacht ist, vertausche man die mittleren Glieder, so erhält man links und rechts Brüche von gleichem Nenner und durch Addition aller Gleichungen die Behauptung.

197.

Ähnliche Polygone über den Seiten des rechtw. Dreiecks.

Lehrsatz. Errichtet man über drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Polygone, so daß die Seiten des Dreiecks homologe Seiten derselben bilden, so ist das über der Hypotenuse errichtete Polygon der Summe der beiden anderen gleich. (Erweiterung des Pythagoreischen Lehrsatzes.)

Beweis. Sind H, K_1, K_2 die ähnlichen Polygone, h, k_1, k_2 die Seiten des Dreiecks, so ist nach 196

$$H : K_1 : K_2 = h^2 : k_1^2 : k_2^2$$

und $\frac{K_1 + K_2}{H} = \frac{k_1^2 + k_2^2}{h^2}$ (163c, 163b 1 und Substitution gleicher Verhältnisse). Daraus folgt durch 156 die Behauptung.

198.

Der Ähnlichkeitspunkt.

Lehrsatz. Liegen zwei ähnliche Polygone so, daß zwei homologe Seiten parallel sind, so ist

a) jede Seite (und Diagonale) der ihr homologen parallel,

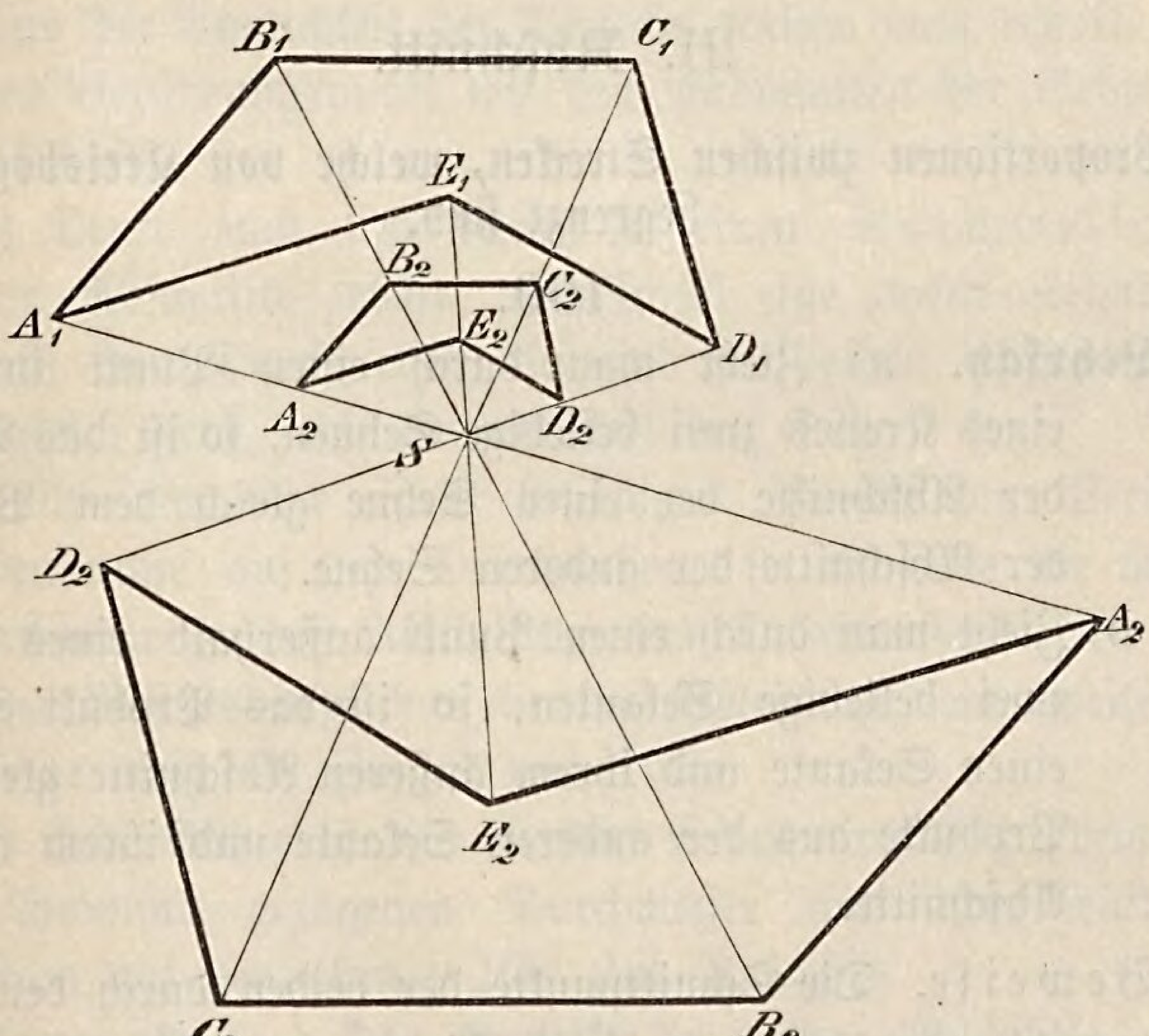
b) die Geraden, welche man durch je zwei homologe Ecken zieht, schneiden sich alle in einem Punkte.

Beweis. Zu a). Ist $A_1 B_1 \parallel A_2 B_2$, und man verbindet

B_1 mit B_2, so erhält man an den genannten Parallelen bei Symmetrielage der Polygone gleiche **Wechselwinkel**, außerdem gleiche **korrespondierende** Winkel, und subtrahiert man diese von den gleichen Winkeln B_1 und B_2 der Polygone, so bleibt die Gleichung der beiden Wechselwinkel (beziehungsweise korrespondierenden), welche die Seiten $B_1 C_1$ und $B_2 C_2$ mit der Verbindungslinie $B_1 B_2$ bilden. Somit $B_1 C_1 \parallel B_2 C_2$ u. s. w.

Zwei homologe Diagonalen sind Seiten ähnlicher Dreiecke, von welchen zwei Seiten dem eben Gesagten gemäß parallel sind.

Zu b). Es wird gezeigt werden, daß die von zwei beliebigen homologen Ecken N_1 und N_2 nach dem Schnittpunkte (S) zweier Verbindungslinien ($A_1 A_2$ und $B_1 B_2$) gezogenen Strecken in einer Geraden liegen, indem man die hiefür in 169c gestellten Bedingungen als erfüllt nachweist.



Die Diagonale $A_1 N_1$ ist zunächst der Diagonale $A_2 N_2$ parallel (a).

$$\begin{aligned} \text{Ferner gilt } A_1 N_1 : A_1 B_1 &= A_2 N_2 : A_2 B_2 \quad (194\ \text{Z.}) \\ \text{und } A_1 B_1 : A_1 S &= A_2 B_2 : A_2 S \quad (166c) \\ \hline \text{folglich } A_1 N_1 : A_1 S &= A_2 N_2 : A_2 S, \\ \text{oder } A_1 N_1 : A_2 N_2 &= A_1 S : A_2 S \end{aligned}$$

d. h. die parallelen Strecken $A_1 N_1$ und $A_2 N_2$, die von den Punkten A_1 und A_2 der Geraden $A_1 SA_2$ ausgehen, verhalten sich wie die Abstände dieser Punkte von S. Somit liegen die drei Punkte N_1, N_2, S nach 169c auf einer Geraden. Für Symmetrie=

lage sind, wie aus dem Beweise zu a hervorgeht, die Bedingungen des Zusatzes zu 169c erfüllt.

Anmerkung. Der Schnittpunkt der Verbindungslinien homologer Ecken zweier ähnlicher Polygone, deren Seiten parallel sind, heißt der Ähnlichkeitspunkt der Polygone. Derselbe liegt in den Verbindungsstrecken selbst, wenn die Polygone symmetrisch in der Ebene liegen, außerdem in der Verlängerung dieser Strecken. Haben zwei ähnliche Polygone von parallelen Seiten ein homologes Eck gemeinschaftlich, so ist dieses zugleich ihr Ähnlichkeitspunkt.

Jede beliebige durch den Ähnlichkeitspunkt zweier Polygone gezogene Gerade teilt dieselben in zwei Paare ähnlicher Polygone.

III. Abschnitt.

Proportionen zwischen Strecken, welche von Kreisbögen begrenzt sind.

199.

Produkte der Sehnenabschnitte und der Sekantenabschnitte.

Lehrsatz. a) Zieht man durch einen Punkt innerhalb eines Kreises zwei beliebige Sehnen, so ist das Produkt der Abschnitte der einen Sehne gleich dem Produkte der Abschnitte der anderen Sehne.

b) Zieht man durch einen Punkt außerhalb eines Kreises zwei beliebige Sekanten, so ist das Produkt aus der einen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte gleich dem Produkte aus der anderen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte.

Beweise. Die Schnittpunkte der beiden durch den Punkt gezogenen Geraden mit dem Kreise können so verbunden werden, daß Dreiecke entstehen, deren Ähnlichkeit bei Rücksicht auf 108 Zus. 1 aus 185 erhellt. Dann 188b.

200.

Lehrsätze. (Besondere Fälle.)

Mittlere Proportionalen.

a) Ist von dem äußeren Teilpunkte (M) der Sehne eine Tangente an den Kreis gezogen, so kann man sich letztere dadurch aus einer Sekante entstanden denken, daß die beiden Schnittpunkte zusammengerückt sind, der Unterschied der beiden

Faktoren des Produktes (die Sehne) Null, folglich diese Faktoren unter sich und der zwischen M und dem Berührungspunkte liegenden Strecke gleich geworden sind. Dadurch wird der Satz wahrscheinlich:

Das Quadrat der Tangente, welche man von irgend einem Punkte M aus an den Kreis zieht, ist dem Produkte der äußeren Abschnitte gleich, in welche der Punkt eine beliebig nach demselben gerichtete Sehne teilt.

(Die Tangente ist die mittlere Proportionale zu den äußeren Abschnitten der Sehne.)

Beweis. Die zur Aufstellung des Satzes angeführte Induktion hat nicht die Kraft eines Beweises; derselbe folgt vielmehr aus der Ähnlichkeit der Dreiecke, welche man erhält, wenn man den Berührungspunkt mit den Endpunkten der Sehne verbindet. 110a.

b) Denkt man sich durch M einen Durchmesser in innere Abschnitte geteilt, und in M eine zweite Sehne senkrecht auf dem Durchmesser, so sind die beiden Abschnitte derselben gleich groß, und es resultiert der Satz:

Fällt man von einem beliebigen Punkte der Peripherie eine Senkrechte auf den Durchmesser, so ist diese die mittlere Proportionale zu den Abschnitten des Durchmessers.

Der Beweis liegt hier in der Ableitung; ein zweiter Beweis folgt aus 108 Zus. 2 und 155a.

c) Jede Sehne ist die mittlere Proportionale zu dem durch ihren Endpunkt gezogenen Durchmesser und ihrer senkrechten Projektion auf denselben. 108 Zus. 2 155b.

Anmerkung. Das Produkt der beiden Abschnitte, welche ein Punkt auf einer Sehne macht, ist demnach nur von der Lage des Punktes, nicht aber von der Lage und Größe der Sehne abhängig. Man darf deshalb dieses Produkt als ein Bestimmungsstück der Lage des Punktes gegen den Kreis ansehen und nennt es die Potenz des Punktes. Der Punkt, dessen Potenz bezüglich eines Kreises vom Radius r den Wert m.n hat, ist vom Mittelpunkt um $p = \sqrt{r^2 \pm m n}$ entfernt, je nachdem er außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt. Potenz eines Punktes. N. G.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche für einen Kreis die gleiche Potenz besitzen, ist demnach die mit der Entfernung (p) des Punktes vom Mittelpunkt um diesen beschriebene Kreislinie.

Schiefe Projektion der Sehne. d) (Verallgemeinerung von 200c.) Jede Sehne ist die mittlere Proportionale zu einer anderen durch ihren Endpunkt gezogenen Sehne und ihrer schiefen Projektion auf dieselbe, wenn die Projizierende der im gemeinschaftlichen Endpunkte der Sehnen angelegten Tangente parallel läuft.

Der Beweis wird durch 200c und 185 geführt.

201.

Umkehrungen von 199 und 200. **Lehrsätze.** a) Teilt ein Punkt, in welchem sich zwei Strecken oder deren Verlängerungen schneiden, die Strecken beide so in innere oder beide so in äußere Abschnitte, daß das Produkt der Abschnitte der einen Strecke dem Produkte der Abschnitte der anderen gleich ist, so liegen die vier Endpunkte der beiden Strecken in der Peripherie eines Kreises.

Beweis. Die Rechnung ergibt, daß der vierte Endpunkt ebenso weit vom Teilpunkte entfernt ist, als der Punkt, in welchem die durch die 3 anderen Punkte gelegte Peripherie den nämlichen Strahl schneidet.

b) Schneidet man von dem Schnittpunkte zweier Strahlen aus auf dem einen eine Strecke ab, deren Quadrat dem Produkte der zwei auf dem anderen Strahle abgeschnittenen Strecken gleich ist und legt durch die drei Endpunkte dieser Strecken einen Kreis, so berührt die erste Strecke den Kreis in ihrem Endpunkte. 184, 110b.

202.

Chordale. N. G. **Lehrsatz.** Der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, ist eine Gerade, welche auf der Centrale (c) senkrecht steht und von dem Mittelpunkte des kleineren Kreises (r_2) um $\left(\frac{c}{2} - \frac{r_1^2 - r_2^2}{2c}\right)$ entfernt ist.

Beweis. Für Punkte gleicher Potenz ist die Differenz der Quadrate ihrer Mittelpunktsabstände ($p_1^2 - p_2^2$) gleich groß (200 Anm.) und zwar gleich der Differenz der Radienquadrate ($r_1^2 - r_2^2$). Damit ein Punkt diese Bedingung erfülle, ist hinreichend und notwendig, daß er auf der im Lehrsatz definierten Geraden liege.

Erklärung. Die Gerade, welche alle Punkte enthält, die in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, heißt die Chordale der Kreise.

Zusatz 1. Die von einem Punkte der Chordale nach beiden Kreisen gezogenen Tangenten sind gleich groß und umgekehrt: der Schnittpunkt gleicher Tangenten liegt auf der Chordale.

Zusatz 2. Die gemeinschaftliche Berührungsstrecke zweier Kreise wird durch die Chordale halbiert.

Zusatz 3. Schneidet ein Kreis zwei andere, so liegt der Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Sehnen auf der Chordale der beiden anderen Kreise.

Hieraus ergibt sich die einfachste Methode zur Konstruktion der Chordale.

Zusatz 4. Die gemeinschaftliche Sehne oder gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise ist ihre Chordale.

Erklärung. Ein Punkt A und ein Kreis besitzen eine Chordale, insofern es eine Gerade gibt, in welcher jeder Punkt um die Länge der von ihm an den Kreis gezogenen Tangente vom Punkte A absteht.

Konstruktion dieser Chordale für Punkte außerhalb und innerhalb des Kreises!

Wie liegt die Chordale zweier Punkte?

Erklärung. Für einen Kreis und eine Gerade ist letztere selbst als Chordale zu betrachten, insofern die Gerade als Peripherie eines Kreises gelten kann, der sich von einem fest gedachten Peripheriepunkte aus unendlich erweitert hat, und als sich bei unendlichem Wachsen des einen Radius die Chordale dem fest gedachten Peripheriepunkt des wachsenden Kreises unendlich nähert.

Zusatz 5. Die Chordalen dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt heißt der Chordalpunkt der drei Kreise.

203.

Der äußere harmonische Teilpunkt ist Schnittpunkt der Tangenten. N. G.

Lehrsatz. a) Zieht man von einem Punkte aus die Tangenten an den Kreis und einen Durchmesser, so ist dieser Durchmesser im Durchschnittspunkte der Tangenten und im Schnittpunkte der Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, harmonisch geteilt.

Beweis. Die beiden Nebenwinkel, welche die Verbindungssehne mit der Tangente bildet, werden durch die vom Berührungspunkte nach den Endpunkten des Durchmessers gezogenen Sehnen halbiert. (110 a, 108 Zus. 1.) 172. 177.

Anmerkung. Man kann also den Durchmesser dadurch harmonisch teilen, daß man entweder in dem willkürlich angenommenen inneren Teilpunkte eine Senkrechte und in deren Endpunkt eine Tangente errichtet, oder daß man von dem willkürlich angenommenen äußeren Teilpunkte aus die Tangenten und die Verbindungssehne der Berührungspunkte zieht.

b) Die Hälfte einer harmonisch geteilten Strecke ist die mittlere Proportionale zu den Entfernungen ihres Mittelpunktes vom inneren und äußeren Teilpunkte.

Zusatz. Ist der Durchmesser eines Kreises harmonisch geteilt, so ist der Radius die mittlere Proportionale zu den Mittelpunktsabständen der Teilpunkte.

204.

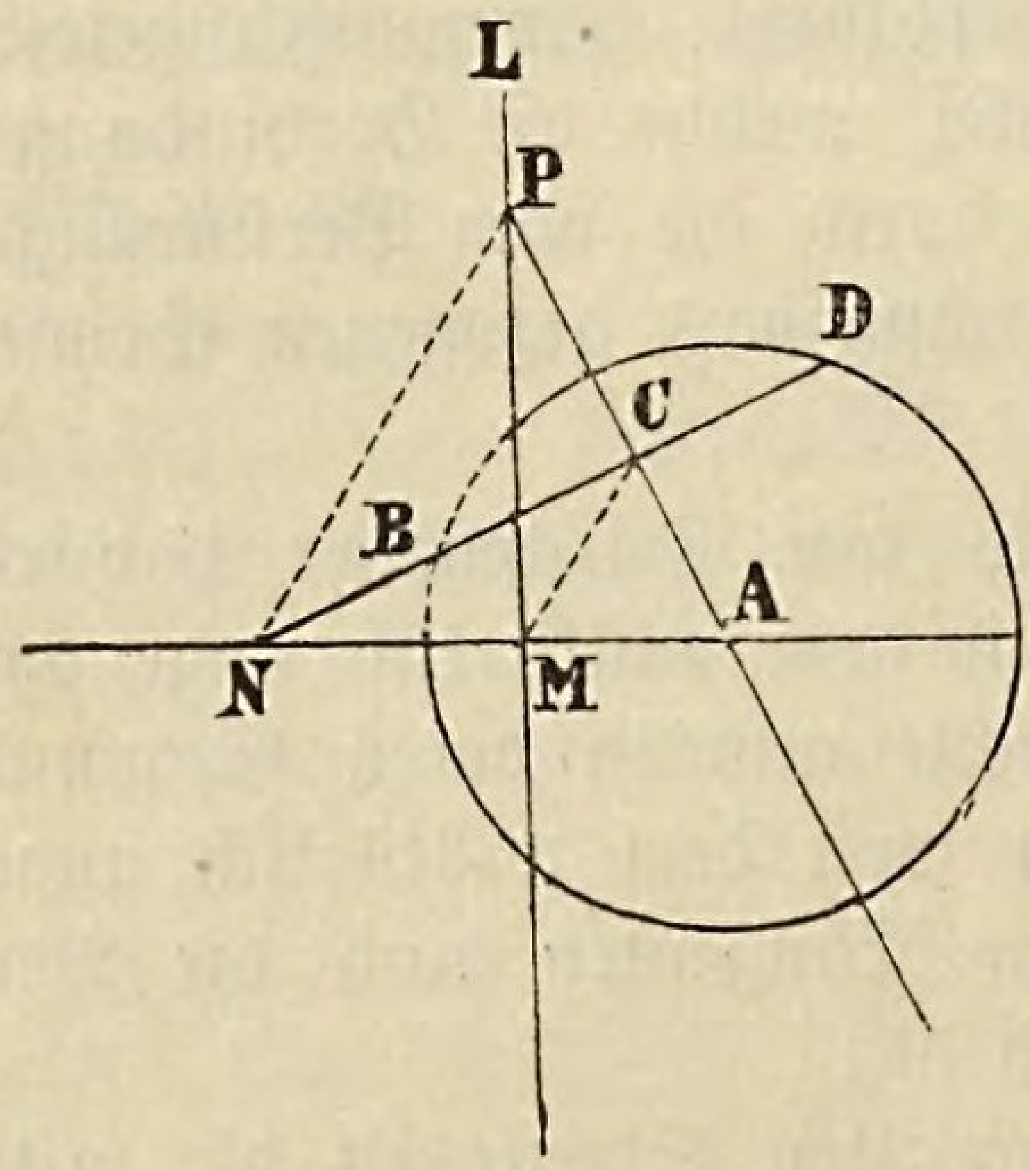
Pol und Polare. N. G.

Lehrsätze. a) Ist ein Durchmesser D_1 in den Punkten M und N harmonisch geteilt und man errichtet in M und N Senkrechte auf D_1, so ist ein zweiter Durchmesser D_2 durch seinen Schnittpunkt mit einer dieser Senkrechten und den Fußpunkt der vom andern Teilpunkte auf ihn gezogenen Senkrechten harmonisch geteilt.

Beweis durch 185 und 203 b.

b) Ist ein Durchmesser in den Punkten M und N harmonisch geteilt und man errichtet in M und N Senkrechte auf dem Durchmesser, so wird jede durch den einen dieser Punkte gezogene Sehne durch ihn und ihren Schnittpunkt mit der im anderen Teilpunkte errichteten Senkrechten harmonisch geteilt.

Beweis. Man konstruiere das durch die Endpunkte des Durchmessers und der Sehne bestimmte Viereck, ziehe die Diagonalen und ergänze es zum vollständigen Vierseit. Dadurch entsteht ein zweites vollständiges Vierseit, von welchem der Durchmesser und die Sehne zwei Diagonalen sind. Die dritte Diagonale teilt beide harmonisch (180), geht somit durch den Punkt M, und es bleibt nur noch nachzuweisen, daß sie in M auf dem Durchmesser senkrecht steht. 26 α. Sie halbiert den Winkel, den die von den Endpunkten der Sehne nach M gezogenen Geraden bilden, weil der Durchmesser dessen Nebenwinkel halbiert (178 c), und sie zu diesem der konjugierte harmonische Strahl ist.



Erklärung. Wegen dieser reciproken Beziehungen nennt man den äußeren Teilpunkt N des Durchmessers den Pol zu der im innern Teilpunkte M errichteten Senkrechten und diese selbst die Polare zu N. Ebenso ist der innere Teilpunkt M Pol zu der durch N gezogenen Polare.

Wie lassen sich mit Hilfe dieser beiden Begriffe die vorstehenden Sätze kürzer fassen?

c) Die Polaren (wie BD), deren Pole (P) auf einer geraden Linie (LM) liegen, schneiden sich in einem Punkte, nämlich in dem Pole (N) dieser Geraden (LM).

Beweis. Man zeigt, daß die Verbindungslinie (CN) des zu P konjugierten Punktes C mit dem Pole N, auf PA senkrecht steht durch 203 b und 201 a, indem man mittelst dieser Sätze klar macht, daß die Seite PN des Sehnenvierecks ein Durchmesser ist.

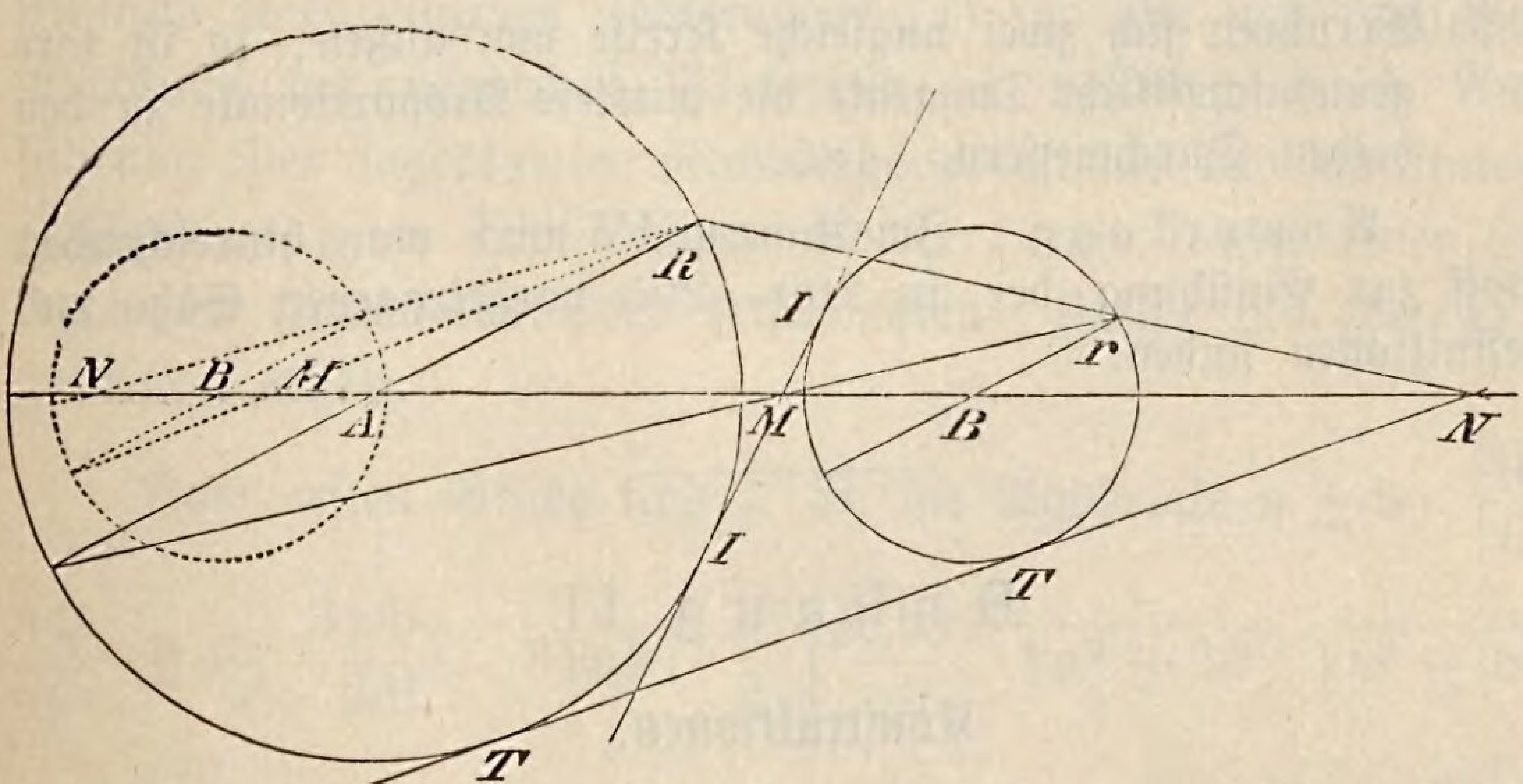
205.

Lehrsatz. Zieht man zu zwei Kreisen von ungleichen Radien (R > r) die Centrale AB, ferner zwei parallele Durchmesser, so bestimmen die Endpunkte derselben ein Trapez. Sowohl die Diagonalen dieses Trapezes schneiden sich in einem für alle Paare paralleler Durchmesser gleichen Punkte der Centrale (in M), als auch die Verlängerungen der nicht parallelen Seiten (in N); und die Centrale ist durch diese beiden Schnittpunkte harmonisch geteilt. Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise. N. S,

Beweis. Die Verbindungslinie der Endpunkte von R und r schneidet die Centrale im Punkte N oder M, je nachdem diese Strecken auf der nämlichen oder auf verschiedenen Seiten der Centrale liegen. Da nun

$$\frac{NB}{NA} = \frac{r}{R} = \frac{MB}{MA'}$$

so liegen auch die anderen beiden Endpunkte der Durchmesser mit N, beziehungsweise M in gerader Linie (169 c).



Durch dieselben Proportionen ist die harmonische Teilung der Centrale AB ausgesprochen und ersichtlich, daß z. B. der innere Teilpunkt M nur durch das Größenverhältnis der Radien bestimmt, von der Neigung der Durchmesser gegen die Centrale unabhängig, und somit für jedes Paar paralleler Durchmesser der nämliche ist.

Erklärung. Die Punkte M und N heißen die Ähnlich-

keitspunkte der beiden Kreise; M ist der innere, N der äußere Ähnlichkeitspunkt.

Anmerkung. Durch ähnliche Erwägungen wie in § 202 erkennt man:

a) daß der äußere und innere Ähnlichkeitspunkt eines Kreises und eines Punktes in letzteren selbst fällt;

b) daß zu einem Kreis und einer Geraden der von der Geraden entfernteste Punkt des Kreises der äußere, der nächstliegende aber der innere Ähnlichkeitspunkt ist.

206. Lehrsätze.

N. S. 1) Berühren sich zwei (ungleiche) Kreise von außen oder von innen, so ist der Berührungspunkt der innere oder der äußere Ähnlichkeitspunkt. 120. 121. 43 Zus. 2.

2) Zieht man durch einen Ähnlichkeitspunkt eine Gerade, welche die beiden Kreise schneidet, so sind die durch die (4) Schnittpunkte gezogenen Durchmesser paarweise parallel (1 zu 3, 2 zu 4).

3) Die gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise geht durch einen Ähnlichkeitspunkt; durch welchen?

4) Zieht man von einem Ähnlichkeitspunkte aus eine Tangente an den einen Kreis, so ist diese zugleich Tangente an den anderen Kreis.

5) Berühren sich zwei ungleiche Kreise von außen, so ist ihre gemeinschaftliche Tangente die mittlere Proportionale zu den beiden Durchmessern. 185.

Anmerkung. Im Anhang IV wird man hinreichenden Stoff zur Einübung der in 200—205 vorgetragenen Sätze und Definitionen finden.

Anhang II.

Konstruktionen.

207.

Die folgenden Konstruktionsaufgaben haben hauptsächlich Verwandlung und Teilung von Figuren zum Gegenstande.

Verwandlung. Unter der Verwandlung einer Figur versteht man Herstellung einer neuen Figur, welche mit der gegebenen gleichen Inhalt hat, in der Form aber von derselben verschieden ist.

Die Lösung solcher Aufgaben kann von der Auffindung einer Strecke abhängig gemacht werden, sei es, daß diese selbst Dimensionen der neuen Figur oder des abzugrenzenden Teiles werden oder (als Entfernung) zur Bestimmung eines gesuchten Punktes dienen soll. In denjenigen Fällen, wo die Lösung einer eindeutig bestimmten Aufgabe von dem Auffinden einer Strecke abhängig ist, ist diese durch die gegebenen Merkmale und gestellten Forderungen eindeutig bestimmt und kann häufig durch Anwendung der Sätze, welche von den Beziehungen zwischen den Dimensionen der Figuren handeln, berechnet werden, d. h. es läßt sich ein mathematischer Ausdruck auffinden, der angibt, in welcher Weise die gesuchte Strecke von den gegebenen abhängig ist (Algebraische Analysis). Berechnung. Algebraische Analysis.

Im Folgenden wird zunächst gelehrt, wie sich aus einer solchen Formel das Verfahren zur Konstruktion der Strecke ableiten läßt.

208.

Erklärung. Ein in allgemeinen Zahlzeichen dargestellter Ausdruck heißt vom ersten Grade, wenn man nach Substitution eines einzigen Zahlzeichens (a) für alle und nach Verwandlung der negativen Vorzeichen in positive, durch Ausführung aller angedeuteten Rechnungsoperationen das substituierte Zahlzeichen a in der ersten Potenz mit irgend einer absoluten (rationalen oder irrationalen) Zahl als Koeffizienten erhält. Charakter algebraischer Ausdrücke, welche geom. Größen darstellen.

Vom ersten Grade sind z. B. die Ausdrücke $a \pm b$; $\frac{ab}{c}$;

$\frac{ab}{c} \pm d$; $\frac{3abc}{2df}$; $3\sqrt{ab}$; $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2bc}{df}}$; $\sqrt{a^2 + b^2}$; $\sqrt{a^2 - b^2}$;

$\sqrt{a^2 - 2b^2 + cd}$; $a\sqrt{2} + b\sqrt{\frac{c}{3d}} + \sqrt{m^2 - n^2}$; $\frac{3\sqrt{c^3}}{\sqrt{a}}$;

$\sqrt[3]{a^2 b}$.

Ein Ausdruck ist vom 2^{ten}, 3^{ten} ... n^{ten} Grade, wenn man durch das obige Verfahren a^2, a^3, ... a^n mit einer absoluten Zahl als Koeffizienten erhält.

Vom zweiten Grade sind z. B. die Ausdrücke $3a^2$; $2ab$; $\frac{abc}{5d}$; $\sqrt{a^4 \pm b^4}$; $\frac{a\sqrt{a^3 + b^3}}{\sqrt{c}}$.

Sind alle Glieder eines Polynoms von gleich hohem Grade, so heißt das Polynom homogen.

Bezeichnen alle allgemeinen Zahlzeichen, welche in einem Ausdrucke vorkommen, Strecken, und sind zugleich alle darin vorkommenden Strecken mit allgemeinen Zahlzeichen bezeichnet, so kann der Ausdruck nur dann eine geometrische Größe darstellen, wenn er homogen ist. (Kontrole der Rechnung.) Die Größe einer Strecke ist durch einen Ausdruck vom ersten Grade, die einer Fläche durch einen Ausdruck vom zweiten Grade gegeben. Vgl. 149 Zus. 2.

Die Aufgabe, eine Strecke zu konstruieren, welche durch einen mathematischen Ausdruck bestimmt ist, beschränkt sich demnach darauf, einen Ausdruck vom ersten Grade zu konstruieren. Schließt man dritte und höhere Wurzeln als nicht mehr elementar konstruierbar aus, so lassen sich alle vorkommenden Fälle auf folgende zurückführen: x zu konstruieren, wenn

$$x = a \pm b; \; x = \frac{ab}{c}; \; x = \sqrt{ab}; \; x = \sqrt{a^2 \pm b^2},$$

und a, b, c gegebene Strecke sind.

209.

Konstruktion der Grundformen.

383. Die Strecke x durch Konstruktion zu finden, wenn

$\frac{ab}{c}$.

$$x = \frac{ab}{c}.$$

Lösung. Da $c : a = b : x$, so ist zu c, a, b die vierte Proportionale zu finden. Man trage c und a vom Scheitel eines beliebigen Winkels aus auf den Schenkeln ab, ziehe die Verbindungslinie der Endpunkte, setze b als Verlängerung an die homologe Seite c an, und ziehe durch den Endpunkt derselben eine Parallele zur Verbindungslinie (167a 3). Auch durch 167a, 1 u. s. w. oder durch 199a, b.

Zusatz 1. $x = \frac{a^2}{c}$, oder die dritte Proportionale zu c und a wird entweder ebenso gefunden, oder indem man (155a) aus c (= BD) und a (= DC) als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert, im Scheitel C auf der Hypotenuse eine Senkrechte errichtet und diese verlängert, bis sie die Verlängerung von BD schneidet (in A). Dann ist DA die gesuchte dritte Porportionale. Auch durch 155b oder 200a. $\frac{a^2}{c}$.

Zusatz 2. Diese Konstruktionen lösen unmittelbar die Aufgabe: Ein Rechteck zu finden, welches eine gegebene Seite (c) hat und einem gegebenen Rechtecke (ab) oder Quadrate (a^2) gleich ist.

384. Die Strecke x durch Konstruktion zu finden, wenn

$$x = \sqrt{ab}.$$ $\sqrt{ab}.$

Lösungen. a) Da $x^2 = ab$, $a : x : b$, so ist zu a und b die mittlere Proportionale zu finden. Man errichte den Halbkreis über der größeren (a) der beiden Strecken, trage vom Endpunkte derselben aus die kleinere (b) auf a ab und errichte im Endpunkte von b eine Senkrechte, dann ist x gleich der Sehne, deren Projektion b ist (200c).

b) Durch 200b, wobei der Kreis um a + b als Durchmesser beschrieben und im Grenzpunkte beider die Senkrechte errichtet wird.

c) Nicht viel umständlicher durch 200a, wobei der Kreis um (a — b) beschrieben und an ihn die Tangente gezogen wird.

Zusatz. Damit ist die Aufgabe gelöst: Die Seite eines Quadrates zu finden, welches einem gegebenen Rechteck, Parallelogramm oder Dreieck gleich ist. (Ein Rechteck (Parallelogramm) oder Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.)

385. Die Strecke x durch Konstruktion zu finden, wenn

$$a)\ x = \sqrt{b^2 + c^2},$$ $\sqrt{b^2 \pm c^2}$

$$b)\ x = \sqrt{b^2 - c^2},$$

Im ersteren Falle ist x die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten b und c sind, im zweiten Falle ist x die eine Kathete eines rechtw. Dreiecks, dessen Hypotenuse b und dessen andere Kathete c ist.

Zusatz. Damit ist die Aufgabe gelöst: Ein Quadrat zu finden, welches a) der Summe, b) der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist, ferner wird dadurch die homologe Seite eines Polygons gefunden, welches zwei gegebenen Polygonen, deren homologe Seiten b und c sind, ähnlich und a) der Summe, b) der Differenz dieser Polygone gleich sein soll.

210.

Zurückführung der Ausdrücke vom ersten Grade auf die Grundformen.

Um die Konstruktion anderer Ausdrücke vom ersten Grade auf die Grundformen zurückzuführen, hat man sie im Allgemeinen in die Form eines Polynoms zu bringen, dessen einzelne Glieder von der Form $\frac{a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ a_{n-1}\ a_n}{b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ b_{n-1}}$ sind, wobei unter a und b konstruierbare Strecken verstanden sind. Diese Strecken sind entweder gegeben oder sie erhalten die Form von Quadratwurzeln, deren Radikand entweder ein Produkt zweier Faktoren (vom ersten Grade) oder die Summe oder Differenz zweiter Quadrate ist.

Beispiele.

386. $x = \frac{3abcd}{2fgh}$.

Lösung. Man konstruiere $z_1 = \frac{cd}{h}$, dann ist $x = \frac{3abz_1}{2fg}$. hierauf konstruiere $z_2 = \frac{bz_1}{g}$, dann wird $x = \frac{3az_2}{2f}$ und somit die vierte Proportionale zu 2f, 3a, z_2.

387. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lösung. $x = \sqrt{a^2 + (\sqrt{b^2 + c^2})^2}$.

388. $x = a\sqrt{2},\ y = a\sqrt{3},\ z = a\sqrt{5},\ u = a\sqrt{7} \ldots$

Lösungen. $x = \sqrt{a^2 + a^2},\ y = \sqrt{(2a)^2 - a^2},$ $z = \sqrt{(2a)^2 + a^2},\ u = \sqrt{(4a)^2 - (3a)^2}$.

388a. Ausdrücke wie $\frac{a}{\sqrt{3}}$ werden zunächst umgeformt, indem man den Nenner rational macht: $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$; oder man setzt $\frac{a}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \sqrt{\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2}}$ und ähnlich.

Anmerkung. Da $b = \left(\frac{b+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-1}{2}\right)^2$, so läßt sich jede Zahl als Differenz zweier Quadrate darstellen; daß sie als Summe mehrer Quadrate dargestellt werden kann, folgt leicht daraus, daß man zu der zunächst unterhalb b liegenden Quadratzahl das Fehlende in lauter 1 addieren kann.

389. $x = \sqrt{\frac{a^3 - b^3}{c}}$.

Lösung. $x = \sqrt{\left(\sqrt{a \cdot \frac{a^2}{c}}\right)^2 - \left(\sqrt{b \cdot \frac{b^2}{c}}\right)^2}$,

oder $x = \sqrt{(a-b)\left(\frac{a^2}{c} + \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{c}\right)}$.

390. $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$.

Lösung. $x = \sqrt{a^2 + \left[\sqrt{b\sqrt{b^2 + \left(\frac{c^2}{b}\right)^2}}\right]^2}$.

211.

Vier fundamentale Aufgaben über Verwandlung von Dreiecken.

391. Den geometrischen Ort für die Spitzen aller Dreiecke zu konstruieren, welche mit einem gegebenen Dreiecke dieselbe Grundlinie und gleichen Inhalt haben. Verlegung der Spitze.

Die Lösung ist eine durch die Spitze zur Grundlinie Parallele.

392. Die Spitze eines Dreiecks mit Beibehaltung seiner Größe und der Lage seiner Grundlinie in einen gegebenen Punkt zu verlegen.

Lösung. Zieht man durch den Punkt eine Parallele zur Grundlinie, und verlängert, wenn es nötig ist, eine Seite bis zu dieser Parallelen, so ergibt sich die neue Grundlinie als vierte Proportionale zur verlängerten Seite, ursprünglichen Seite und gegebenen Grundlinie. (148 b) C 391.

Die Gegenseite hat eine vorgeschriebene Richtung.

393. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem die diesem Winkel gegenüber liegende Seite eine vorgeschriebene Richtung hat.

Lösung. Sind a und c die Seiten, welche den beizubehaltenden Winkel B einschließen, und man zieht durch A eine Parallele AD*) zu der vorgeschriebenen Richtung, so erfüllen die gesuchten Seiten x und y, wenn sie der Gleichung

$$xy = ab$$

genügen, die Forderung, daß das neue Dreieck dem gegebenen gleich wird (148b). Wird überdies

$$\frac{x}{y} = \frac{BD}{c}$$

gemacht, dann ist auch für den Parallelismus gesorgt. 169a. Durch Multiplikation erhält man

$$x^2 = BD \cdot a.$$

Determination. Die Konstruktion ist unmöglich, wenn die beiden von B aus laufenden Strecken BD und a entgegengesetzte Richtung haben. Die Rechnung gibt derartige Determinationen, wenn man Strecken von entgegengesetzter Richtung entgegengesetzte Vorzeichen beilegt.

Die Gegenseite geht durch einen geg. Punkt.

394. Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels in ein anderes zu verwandeln, in welchem die dem Winkel gegenüberliegende Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Lösung. Man unterscheide, ob der gegebene Punkt P innerhalb oder außerhalb der Winkelebene B liegt.

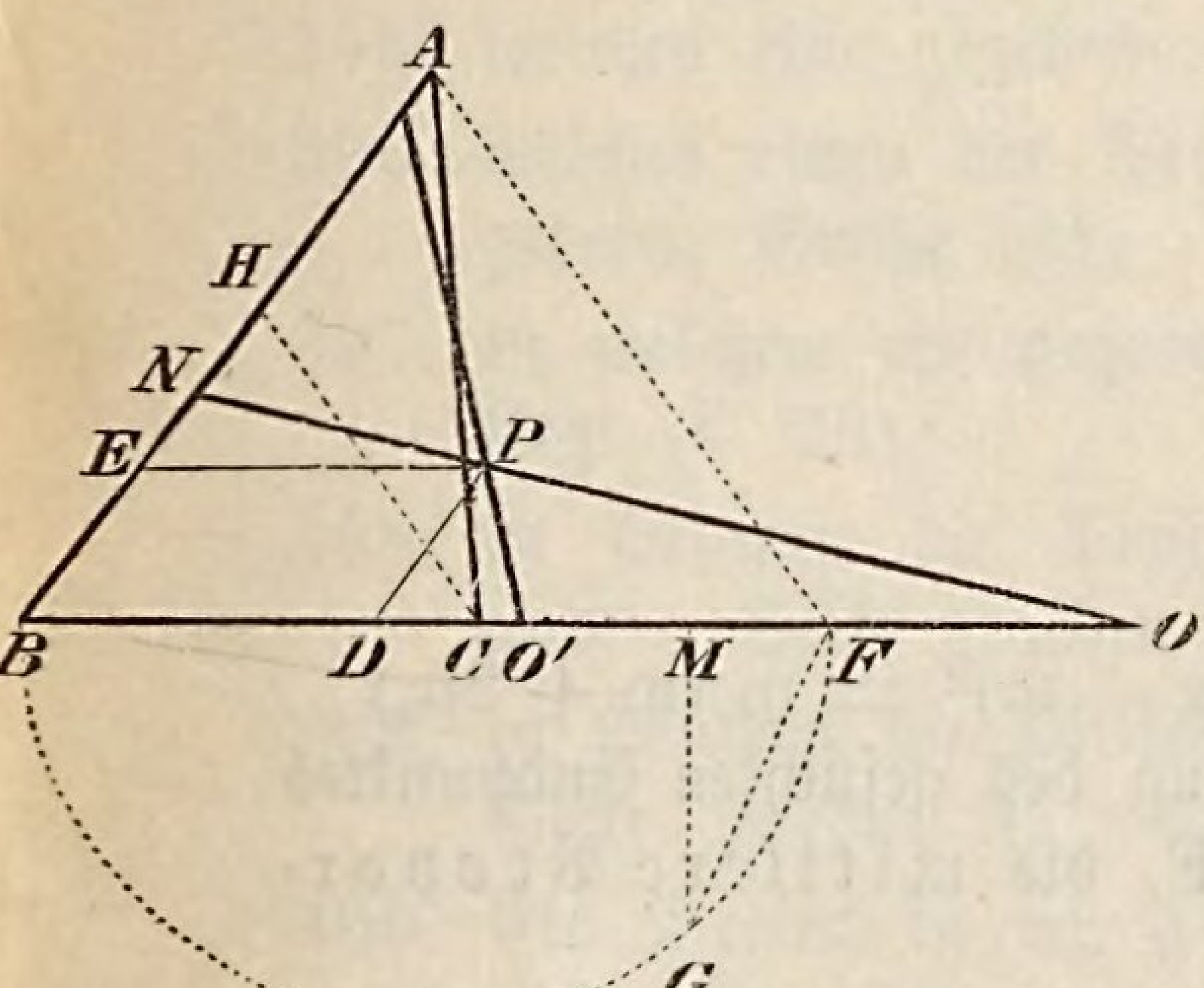
Sind a, c, b die Seiten des gegebenen Dreiecks ACB, und bezeichnet man mit BN = y, BO = x die dem Winkel B anliegenden Seiten des gesuchten, so muß zunächst sein (148b)

$$xy = ac \; . \; . \; . \; . \; . \; (1$$

Durch die Lage von P sind die mit a und c parallelen Strecken (Coordinaten) $PE = DB = p_a$ und $PD = EB = p_c$ gegeben, und man hat nach 166c für

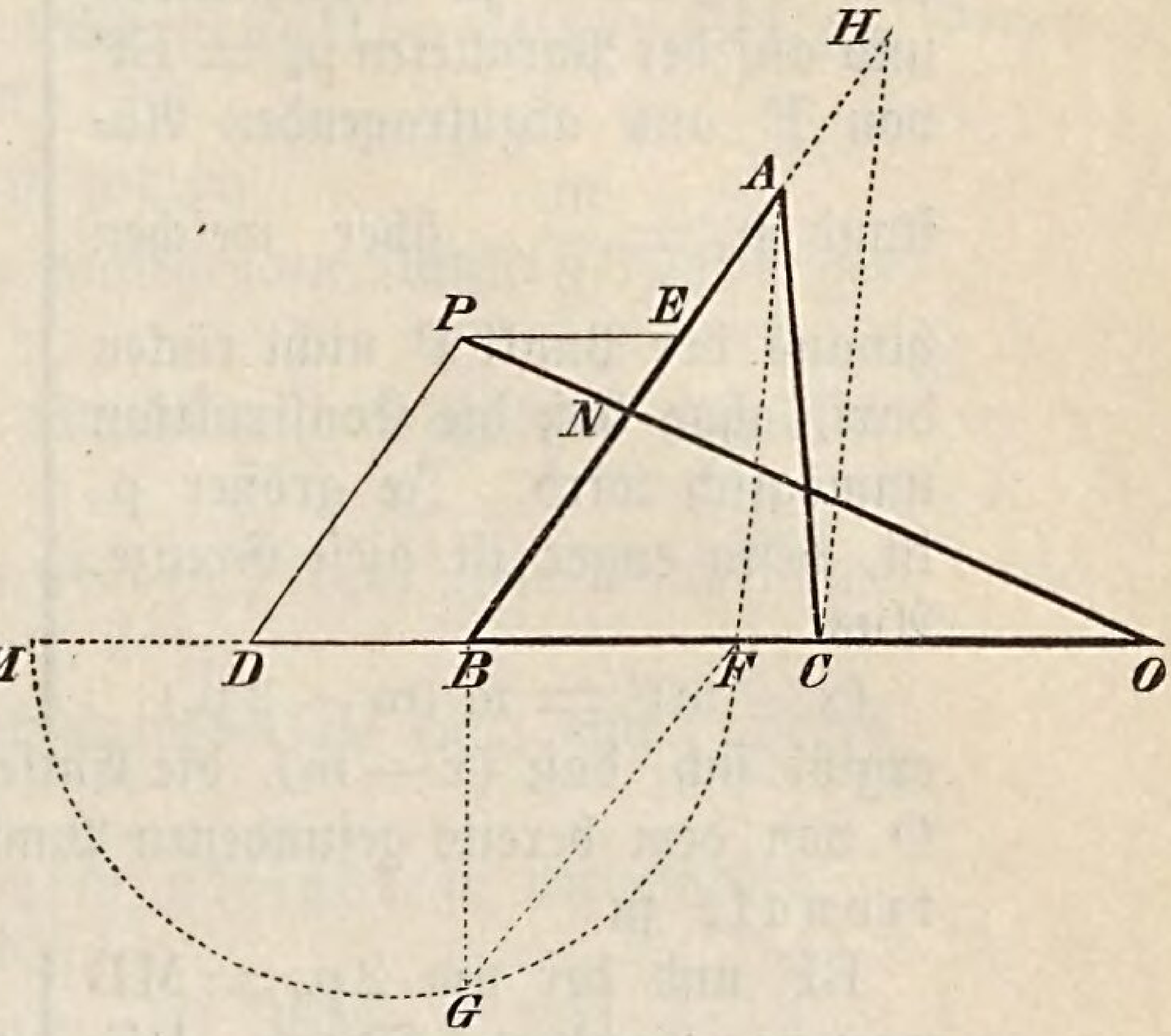
*) Bezüglich der Ausführung der Konstruktion vgl. die Figur zu C 419.

P innerhalb der Winkelebene



$$\frac{x}{y} = \frac{x - p_a}{p_c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2$$

P außerhalb der Winkelebene



$$\frac{x}{y} = \frac{x + p_a}{p_c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2$$

Durch Multiplikation von (1 und (2

$$x^2 = \frac{ac}{p_c}(x - p_a)$$

$$\left(x - \frac{ac}{2p_c}\right)^2 = \left(\frac{ac}{2p_c}\right)^2 - p_a \frac{ac}{p_c}$$

$$x^2 = \frac{ac}{p_c}(x + p_a)$$

$$\left(x - \frac{ac}{2p_c}\right)^2 = \left(\frac{ac}{2p_c}\right)^2 + p_a \frac{ac}{p_c}$$

Die Ausführung der Konstruktion verlangt zunächst

$$\frac{ac}{2p_c} = m,$$

was mit Leichtigkeit als vierte Proportionale gefunden wird

$$2\,BE : BC = BA : m$$

$$m = BF.$$

$$(x - m)^2 = m^2 - 2\,m\,p_a$$

Daraus ergibt sich zunächst eine Determination für die Lage des Punktes P. Die Konstruktion wird unmöglich, wenn $m < 2p_a$. Da nun m von den Dimensionen a, c des gegebenen Dreiecks und der Parallelen p_c

$$(x - m)^2 = m^2 + 2\,m\,p_a$$

Die Möglichkeit der Konstruktion hat hier nur die eine Beschränkung, daß P nicht im Scheitelwinkel des gegebenen Winkels liegen darf. (p_c und dadurch m negativ.)

abhängt, so gibt es für jedes $p_c = BF$ einen aus der Gleichung $m - 2p_a = o$ zu berechnenden und auf der Parallelen $p_a = EP$ von E aus abzutragenden Abstand $p_a = \frac{m}{2}$, über welchen hinaus der Punkt P nicht rücken darf, ohne daß die Konstruktion unmöglich wird. Je größer p_c ist, desto enger ist diese Grenze. Aus

$$(x - m)^2 = m\,(m - 2\,p_a)$$

$$(x - m)^2 = m\,(m + 2p_a)$$

ergibt sich, daß $(x - m)$, die Entfernung des gesuchten Endpunktes O von dem bereits gefundenen Punkte F, die mittlere Proportionale zu

BF und der um $2\,p_a = MB$ verminderten Strecke BF, also zu BF und FM ist.

BF und der um $2p_a = BM$ vermehrten Strecke BF, also zu BF und FM ist.

Konstruktion.

Ziehe von P aus die Parallelen PE, PD, verdopple BE, so daß $BH = 2\,BE$, ziehe HC und durch A eine Parallele zu HC, so ist BF gefunden.

Verdopple BD, so daß $BM = 2\,BD$ und suche durch Halbkreiskonstruktion die mittlere Proportionale zu BF und FM, so ist FG der Abstand des gesuchten Punktes O von F.

Die Aufgabe hat hier zwei Lösungen, welche man erhält, wenn man FG einmal nach rechts, das andere Mal nach links hin von F aus abträgt.

(Entsprechend dem doppelten Vorzeichen der Wurzel

$$FO = \pm\sqrt{m\,(m - 2p_a)}$$

Hier entspricht den gestellten Forderungen nur der eine Wert von x, den man durch additives Ansetzen von FG an BF erhält.

Anmerkung. Der Fall, in welchem P im Winkelraume liegt, unterscheidet sich von dem anderen in der Behandlung nur dadurch, daß dort $-p_a$ an die Stelle von $+p_a$ gesetzt ist. Die Betrachtung der Figur zeigt, daß in beiden Fällen diese Strecken vom Punkte P aus nach entgegengesetzten Richtungen laufen.

212.

Aufgaben über Verwandlung von Dreiecken.

Ein gegebenes Dreieck soll mit Beibehaltung einer Seite a in ein anderes verwandelt werden, Übungen.

395. welches eine gegebene Seite (b) hat;
396. welches einen der Seite a anliegenden Winkel (B) von gegebener Größe hat;
397. in welchem ein gegebener Winkel A der Seite a gegenüber liegt (C 29);
398. in welchem die Projizierende (h_b) der Seite a auf eine andere Seite gegeben ist (C 28);
399. in welchem die Mittelpunktstransversale (m_b) einer andern Seite gegeben ist. 62 c.
400. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln
    a) mit gegebener Grundlinie,
    b) mit gegebenem Schenkel. C 383. C 391.
401. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel an der Spitze hat. C 391. C 393.
402. Ein Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.
403. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem gegebenem Dreiecke ähnlich ist.
404. Ein Dreieck in eine Raute zu verwandeln
    a) von gegebener Seite,
    b) von gegebener Diagonale,
    c) von gegebenem Winkel.
405. Ein Dreieck in ein Trapez zu verwandeln, von welchem die Höhe und eine der Parallelen gegeben sind.

405a) Ein Dreieck in ein Trapez zu verwandeln, von welchem die Grundlinie und die an derselben liegenden Winkel gegeben sind.

406. Ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

213.

Verwandlung von Polygonen.

407. Ein n-Eck in ein (n—1)-Eck zu verwandeln. Wegschaffung eines Eckes.

Lösung. Man schneidet durch eine Diagonale ein Dreieck ab und verlegt durch eine Parallele die gegenüberliegende Spitze in die Verlängerung einer angrenzenden Polygonsseite.

Anmerkung. Durch Fortsetzung dieser Konstruktion läßt sich jedes Polygon in ein Dreieck verwandeln. Somit kann man jedes Polygon in ein Rechteck von gegebener Seite oder in ein Quadrat verwandeln.

408. Die gebrochene Grenze zweier Grundstücke in eine geradlinige zu verwandeln. C 407.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unbestimmt, es kann noch die Forderung erfüllt werden, die geradlinige Grenze von einem gegebenen Punkt ausgehen zu lassen.

Ein Polygon von gegeb. Inhalte und gegeb. Form.

400. Es sind zwei Polygone P_1 und P_2 gegeben, man soll ein drittes Polygon P konstruieren, welches dem P_1 gleich und dem P_2 ähnlich ist. [P_1 soll in ein Polygon von gegebener Form verwandelt werden.]

Lösung. Da die Konstruktion eines dem P_2 ähnlichen Polygons (P) keine Schwierigkeit bietet (181), so ist nur die Größe derjenigen Seite (x) von P zu ermitteln, welche einer bestimmten Seite a_2 von P_2 homolog werden soll.

In dem gegebenen Falle lassen sich die Seiten q_1 und q_2 der Quadrate ermitteln, welche den beiden gegebenen Polygonen (P_1, P_2) gleich sind. Dann ist

$$P = P_1 = q_1^2$$

$$P_2 = q_2^2$$

und nach 196

$$P : P_2 = x^2 : a_2^2$$

$$q_1^2 : q_2^2 = x^2 : a_2^2$$

$$x = \frac{q_1}{q_2} a_2$$

Anmerkung. Zur Lösung der Aufgabe genügt es, das Größenverhältnis $\frac{P_1}{P_2}$ der gegebenen Polygone zu kennen, welches direkt durch eine rationale oder irrationale Zahl gegeben sein kann. Im ersteren Falle hat man $x^2 = \frac{m}{n} a_2^2 = m\,n \left(\frac{a_2}{n}\right)^2$, und kann $m\,n$ nach C 388 in die Summe oder Differenz zweier Quadrate zerlegen. C 385. Im zweiten Falle ist

$$x^2 = \sqrt{\frac{m}{n}}.\ a^2 = \frac{a}{n} \sqrt{m\,n\,a^2}.\quad C\ 384.$$

214.

Teilung von Strecken.

Verhältnismäßige Teilung.

410. Eine Strecke so zu teilen, daß sich die Teile wie die Zahlen m, p, q, ... r verhalten

Lösung. Man teile die Strecke (a) in $(m+p+q+\ldots r)$ gleiche Teile (C 8), so sind die einzelnen Teile von der Größe

$$l = \frac{a}{m+p+q+\ldots\ldots r}$$

und die Endpunkte der Strecken m l, $(m+p)$ l, $(m+p+q)$ l ..... die verlangten Teilpunkte.

411. Eine gegebene Strecke (AB) harmonisch zu teilen. Harmonische Teilung. N. G.

Lösung. Die allgemeine Aufgabe ist unbestimmt, sie wird bestimmt, wenn ein Teilpunkt gegeben ist.

a) Bei gegebenem innerem Teilpunkte (M) den äußeren (N) zu finden.

α) Man ziehe durch M eine beliebige in M halbierte Strecke, verbinde die Endpunkte derselben durch Gerade mit A und B und ziehe durch den Schnittpunkt derselben eine Parallele zur Strecke. 178a.

β) Bei Anwendung des Lehrsatzes 180 gelingt die Auffindung des äußeren Teilpunkts durch Anwendung des Lineals allein.

γ) Errichte über AB den Halbkreis und in M eine Senkrechte. Die im Endpunkte dieser Senkrechten errichtete Tangente geht durch N (203a).

b) Bei gegebenem äußerem Teilpunkte (N in der Richtung AB) den inneren (M) zu finden.

α) Bei Anwendung des Lehrsatzes 180 findet man den inneren Teilpunkt durch Anwendung des Lineals allein.

β) Beschreibe um AB als Durchmesser einen Kreis und ziehe an diesen von N aus die beiden Tangenten. Die Verbindungssehne der Berührungspunkte geht durch M.

γ) Errichte über AB den Halbkreis, verbinde einen beliebigen Punkt (C) des Bogens mit N und B und mache den Peripheriewinkel BCM = BCN.

c) Zur Einübung der harmonischen Teilung dienen folgende Aufgaben:

1. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden zu ziehen.

Die Lösung gibt ein vollständiges Vierseit, dessen eine Diagonale von dem unzugängl. Punkte zu dem gegegebenen führt.

2. Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind:

α) Eine Winkelhalbierungslinie und die von ihr gemachten Seitenabschnitte.

β) Ein Winkel und die von seiner Halbierungslinie auf der Gegenseite gemachten Abschnitte.

Goldener Schnitt.

412. Eine gegebene Strecke a so in zwei Teile zu teilen, daß der eine Teil die mittlere Proportionale zum anderen und der ganzen Strecke ist. [Teilung in media et extrema ratione, Goldener Schnitt.]

Lösung. Aus $x^2 = a(a - x)$ folgt

$$x^2 + ax = a^2,$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

daraus ergibt sich $x + \frac{a}{2}$ als Hypotenuse des rechtw. Dreiecks, dessen Katheten a und $\frac{a}{2}$ sind.

Anmerkung. Diese Konstruktion kann benützt werden, den Winkel $\frac{2}{5}$ R zu konstruieren, indem man über x ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Schenkel a errichtet. Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit dieses Dreiecks mit dem kleineren, welches man durch Abtragen von $a - x$ auf dem Schenkel (von der Grundlinie aus) konstruiert (184).

Dadurch ist man im Stande $\frac{n}{5}$ R, $\frac{n}{5 \cdot 2^k}$ R, und wegen der Möglichkeit von $\frac{n}{3 \cdot 2^k}$ R auch $\frac{n}{3 \cdot 5 \cdot 2^k}$ R zu konstruieren, wobei in jedem einzelnen Falle n und k beliebige ganze Zahlen bedeuten.

215.

Teilung von Polygonen durch Gerade, welche von einem gegebenen Ecke aus gehen.

Das Dreieck von einem Ecke aus geteilt.

413. Ein Dreieck von einem gegebenen Ecke aus in Teile zu teilen, welche sich wie die Zahlen m, p, q . . . . r verhalten.

Lösung. Man teile die Gegenseite in diesem Verhältnisse (C 410), und ziehe von dem Ecke Gerade nach den Teilpunkten.

414. Von einem Dreiecke durch eine Gerade, welche durch ein gegebenes Eck geht, einen Teil von gegebener Größe abzuschneiden.

Lösung. a) Ist die Größe des Teils in Form einer ganzen oder gebrochenen Anzahl $\left(\frac{m}{n}\right)$ von Flächeneinheiten,

(Quadratmetern) gegeben, so hat man im Allgemeinen, da die Höhe h bekannt ist, für die unbekannte Grundlinie x

$$xh = \frac{m}{n} 1^2$$

wobei m und n ganze Zahlen sind. Man findet aus

$$x = \frac{(m \cdot 1) \cdot 1}{(nh)},$$

daß x die vierte Proportionale zu (nh), der einfachen und der m-fachen Längeneinheit ist. Es kann zweckmäßig sein, wo möglich, m in Faktoren zu zerlegen und diese zu verteilen.

b) Ist das Verhältnis des gesuchten Teiles zum Ganzen gegeben und zwar α) rational, so ist die Aufgabe mit C 413 identisch, β) irrational, so ist wenn a die Grundlinie des Dreiecks bezeichnet $x = a\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt{mna^2}$, was sich durch C 388 oder C 384 erledigt.

415. Ein Viereck von einem Ecke aus durch Gerade in gegebenem Verhältnisse zu teilen. Das Viereck von einem Ecke aus geteilt.

Lösung. Man teile die gegenüberliegende Diagonale in dem gegebenen Verhältnisse und verlege die in der Diagonale liegenden Ecken der Teile durch Parallele zur anderen Diagonale in den Umfang.

416. Ein Polygon von einem Ecke aus durch Gerade in gegebenem Verhältnisse zu teilen. Das Polygon von einem Ecke aus geteilt.

Lösung. Ist a die Seite des Quadrates, welches dem gegebenen Polygone inhaltsgleich ist, und soll die Teilung im Verhältnisse der Zahlen m, n, p erfolgen, so hat das Dreieck, welches dem ersten der verlangten Teile gleich ist und zugleich die erste Diagonale (g_1) zur Grundlinie hat, die Höhe

$$h = \frac{2m}{n+m+p} \cdot \frac{a^2}{g_1}.$$

Diese Höhe h kann kleiner, eben so groß oder größer sein als die Höhe h_1 des ersten Dreiecks. Setzt man $h = h_1 - (h_1 - h)$, so erscheint der gesuchte Teil als Differenz oder Summe zweier Dreiecke von der Grundlinie g_1.

Da von dem Reste des Polygons ein Stück $\frac{n}{m+n+p} \cdot a^2$ abzuschneiden ist, so darf man nur das beschriebene Verfahren wiederholen.

Übungen.

417. Ein Viereck von einem gegebenen Ecke aus durch Gerade
a) zu halbieren,
b) in drei gleiche Teile zu teilen,
c) im Verhältnisse der Zahlen 3 und 5 zu teilen,
d) in drei Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen 1, 2, 3 verhalten.

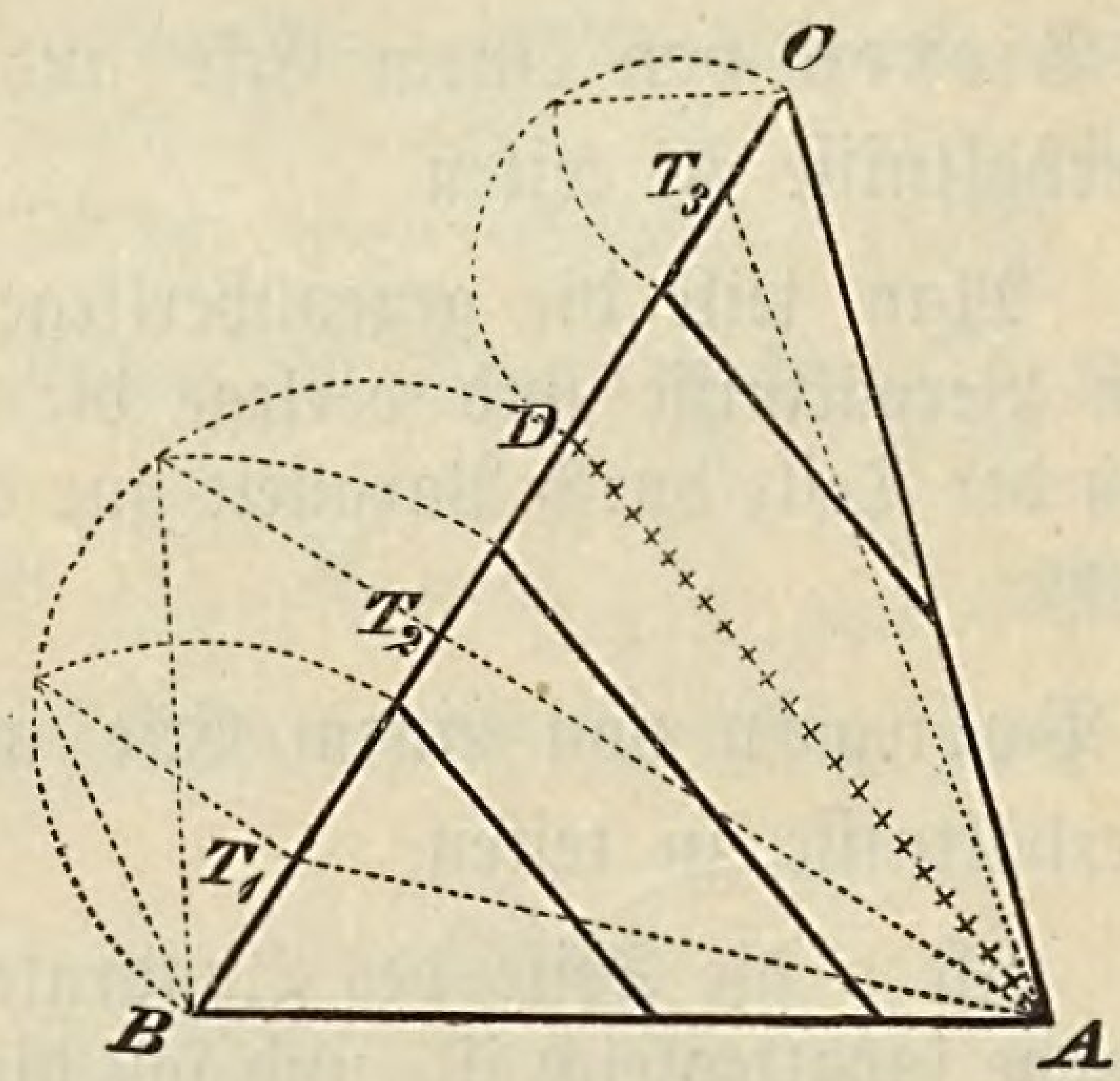
418. Ein Fünfeck von einem gegebenen Ecke aus durch Gerade
a) zu halbieren,
b) in drei gleiche Teile zu teilen,
c) in drei Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen 1, 3, 5 verhalten.

216.

Teilung durch Parallele nach vorgeschriebener Richtung.

Das Dreieck durch Parallele geteilt.

419. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu teilen, welche einer gegebenen Gerade parallel laufen.



Lösung. Man ziehe durch ein Eck (A) eine Parallele (AD) zu der gegebenen Geraden und wähle dieses Eck so, daß die Parallele in das Dreieck fällt. Teilt man die Gegenseite (a) in dem gegebenen Verhältnisse, so erhält man die Grundlinien von Dreiecken, welche die verlangte Größe haben. Man verwandle nun der Reihe nach die Dreiecke, welche auf einer Seite von AD liegen, BAT_1, BAT_2 nach C 393, und beginne dann die Verwandlungen von der anderen Seite her, dann bleibt um AD herum das dem mittleren Dreiecke T_2AT_3 gleiche Fünfeck übrig.

Die Ausführung vereinfacht sich dadurch, daß der Halbkreis BD zur Konstruktion aller auf dieser Seite nötigen mittleren Proportionalen genügt.

420. Ein Dreieck zu halbieren Übungen.
a) durch eine Gerade, welche einer Seite parallel ist;
b) durch eine Gerade, welche auf einer Seite senkrecht steht.

421. Ein Dreieck durch Gerade, welche einer bestimmten Seite desselben parallel sind,
a) im Verhältnisse der Zahlen 3, 5 zu teilen,
b) im Verhältnisse der Zahlen 2, 3, 5 zu teilen.

422. Ein Dreieck durch Gerade, welche auf einer bestimmten Seite desselben senkrecht stehen,
a) im Verhältnisse der Zahlen 1, 3 zu teilen,
b) im Verhältnisse der Zahlen 5, 2, 7, 3 zu teilen.

423. Ein Dreieck durch Gerade, welcher einer Mittelpunktstransversale parallel sind, in 4 gleiche Teile zu teilen.

424. Ein Parallelogramm durch parallele Gerade von vorgeschriebener Richtung in gegebenem Verhältnisse zu teilen. Das Parallelogramm durch Parallele geteilt.

Lösung. Man ziehe durch zwei gegenüberliegende Ecken, die man passend auswählt, Parallele zu der vorgeschriebenen Richtung und teile die von diesen Parallelen geschnittene Mittellinie des gegebenen Parallelogramms in dem gegebenen Verhältnisse. Durch diejenigen Teilpunkte, welche zwischen den gezogenen Parallelen liegen, lassen sich sofort endgiltige Teilungslinien ziehen. Durch die übrigen Teilpunkte zieht man Gerade von den Ecken aus. Die durch die letzte Konstruktion erhaltenen Dreiecke, welche die vorgeschriebene Größe der Teile des Parallelogramms besitzen, werden nach C 393 verwandelt.

425. Ein Parallelogramm durch eine Gerade von vorgeschriebener Richtung zu halbieren. Übungen.

426. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Seite parallel sind, im Verhältnisse der Zahlen m, n, p zu teilen.

427. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche einer Diagonale parallel sind, im Verhältnisse der Zahlen 2, 3 zu teilen.

428. Ein Parallelogramm durch Gerade, welche auf einer Seite senkrecht stehen, im Verhältnisse der Zahlen 1, 5, 3, 1 zu teilen.

429. Ein Trapez durch parallele Gerade in gegebenem Verhältnisse zu teilen, wenn die Teilungslinien Das Trapez durch Parallele geteilt.
a) einer der konvergenten Seiten parallel sein sollen;
b) einer Diagonale parallel sein sollen;
c) auf den parallelen Seiten senkrecht stehen sollen.

Die Lösungen gelingen nach der in C 424 angedeuteten Methode.

430. Ein Trapez in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu teilen, welche den parallelen Seiten parallel sind.

Lösung. Ist s die Summe der gegebenen Verhältniszahlen, m eine derselben $b > d$ die Parallelen, h die Höhe, so ist die Lösung gefunden, wenn die Länge der Parallelen y ermittelt ist, welche ein Trapez von dem Inhalte

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{b + d}{2} \cdot h$$

abschneidet. Ist x die Höhe des Teiles, so gilt demnach

$$\frac{y + d}{2} \cdot x = \frac{m}{s} \frac{b + d}{2} \cdot h,$$

ferner nach 74a u. 189: $\frac{x}{h} = \frac{y - d}{b - d}$

daraus $$y^2 = d^2 + \frac{m}{s} (b^2 - d^2),$$

und eine einfache Konstruktion aus

$$y = \sqrt{b \left[\frac{d^2}{b} + \frac{m}{s} \left(b - \frac{d^2}{b}\right)\right]}.$$

431. Ein Trapez durch Parallele zu den parallelen Seiten
a) zu halbieren,
b) im Verhältnisse der Zahlen 3, 2, 1 zu teilen.

432. Eine Strecke $AB = a$ und die beiden Winkel A und B, welche zwei divergente Strahlen mit der Strecke bilden, sind gegeben; man soll durch eine zu AB Parallele ein Trapez von gegebenem Inhalte abschneiden.

Lösung. Hat das Dreieck, welches den gegebenen Inhalt besitzt, die Grundlinie g, die Höhe h, ist x die Höhe, y die zweite Parallele des gesuchten Trapezes, so ist zunächst

$$gh = (a + y)\, x.$$

Verlängert man die Strahlen über A und B hinaus, so entsteht ein Dreieck von bekannter Höhe h_1 und Grundlinie a, und es ist

$$\frac{x}{h_1} = \frac{y - a}{a}.$$

Die beiden Gleichungen geben verbunden

$$y^2 = a \left(a + \frac{gh}{h_1}\right).$$

Anmerkung. Ist $(A+B) < 2R$, so ist $(-h_1)$ an die Stelle von h_1 zu setzen, und die Aufgabe hat eine Determination. Die Lösung der vorstehenden Aufgabe gibt in Verbindung mit C 416 und C 393 die Mittel, ein Polygon durch Parallele von beliebiger Richtung in gegebenem Verhältnisse zu teilen.

217.

Teilung von einem Punkte aus.

433. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu teilen, welche von einem in einer Seite (a) gelegenen Punkte (P) ausgehen. C 413 (Teilung von a). C 391 Parallele zu AP). Das Dreieck vom Umfange aus.

434. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu teilen, welche von einem innerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte (P) ausgehen. C 392 (Verlegung nach P). C 413. C 391. von einem Punkte innerhalb.

Anmerkung. Die Aufgabe ist unbestimmt, so lange nicht die Richtung einer Teilungslinie gegeben ist. Ist letzteres der Fall, so nehme man sie als Seite des konstruierten Dreiecks, dessen Spitze in P liegt.

435. Ein Polygon in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu teilen, welche von einem im Umfange oder innerhalb gegebenen Punkte ausgehen.

Erledigt sich ohne Schwierigkeit nach der Anleitung C 416 oder C 434.

436. Ein Dreieck in gegebenem Verhältnisse durch Gerade zu teilen, welche von einem außerhalb des Dreiecks gelegenen Punkte (P) ausgehen. von einem Punkte außerhalb geteilt.

Lösung. Man teile das Dreieck in dem gegebenen Verhältnisse nach C 413 von dem Scheitel C des Winkels aus, in dessen Winkelebene P liegt und verwandle die erhaltenen Dreiecke nach C 394 in solche, deren Grenzlinien statt nach C nun nach P gerichtet sind. Wie in C 419 verfährt man auch hier am besten so, daß man den $\sphericalangle B$ für die auf der einen Seite von PC liegenden Dreiecke beibehält, für die übrigen den $\sphericalangle A$.

217a.

Algebraisch-geometrische Aufgaben.

437. Zwei Strecken zu konstruieren, von welchen gegeben sind:
α) ihr Verhältnis (m : n) und ihre Summe a;

β) ihr Verhältnis (m : n) und ihre Differenz d;
γ) ihr Verhältnis (m : n) und die Summe oder die Differenz ihrer Quadrate (d^2).

438. Man soll ein Rechteck zeichnen, dessen Umfang einer gegebenen Strecke (a), und dessen Inhalt dem eines gegebenen Rechteckes (bc) gleich ist.

439. Ein Quadrat (a^2) in ein Rechteck zu verwandeln, dessen Umfang doppelt so groß ist wie der des Quadrates.

440. Man soll ein Rechteck zeichnen, welches halb so groß ist wie ein gegebenes Quadrat und mit diesem gleichen Umfang hat.

441. Man soll eine Strecke a um ein solches Stück verlängern, daß das Rechteck aus der ganzen entstandenen Strecke und aus der Verlängerung dem Quadrat über einer gegebenen Strecke b gleich wird.

442. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, von welchem gegeben sind:
α) eine Kathete und die Summe (Differenz) aus der Hypotenuse und anderen Kathete;
β) die Hypotenuse und die Summe (Differenz) der beiden Katheten;
γ) die zur Hypotenuse gehörige Höhe und die Summe der beiden Katheten;
δ) die Hypotenuse und die Fläche (ab);
ε) die Fläche (ab) und der Umfang.

443. Man soll eine gegebene Strecke a so verlängern,
α) daß die Strecke die mittlere geometrische Proportionale wird zwischen der verlängerten Strecke und der Verlängerung.
β) daß die Verlängerung die mittlere Proportionale wird zwischen der Strecke und der verlängerten Strecke.

444. Man soll eine gegebene Strecke so teilen,
α) daß das Rechteck aus den beiden Teilen gleich ist der Differenz der Quadrate beider Teile.
β) daß das Rechteck aus den beiden Teilen gleich ist dem Rechteck aus der ganzen Strecke und der Differenz der Teile.

445. Man soll ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck zeichnen, dessen Umfang = a ist.

446. In einen Kreis vom Radius r ein Rechteck einzuschreiben, dessen Umfang = 2a ist.

447. In ein gleichschenkliges Dreieck (Basis = a, Höhe = h) soll man ein Quadrat so zeichnen, daß zwei Ecken desselben auf der Basis, und die andern auf den Schenkeln liegen.

448. In ein Dreieck (Grundlinie = g, Höhe = h) ebenso ein Rechteck einzuschreiben,

α) dessen Seiten sich wie die Zahlen p und q verhalten;
β) dessen Umfang = a ist; (Determination!)
γ) dessen Inhalt sich zu dem des Dreiecks wie p : q verhält.

449. Ein Quadrat zu zeichnen, dessen Diagonale um d länger ist als eine Seite.

450. Eine unbegrenzte Gerade und zwei außerhalb derselben liegende Punkte sind gegeben, man soll in den Geraden einen Punkt finden, so daß die Verbindungslinien dieses Punktes mit den zwei gegebenen Punkten
α) gleiche Winkel an den Geraden bilden,
β) einander gleich sind,
γ) sich wie 1 : 2 verhalten.

451. Auf der Verlängerung des Durchmessers eines gegebenen Kreises ist ein Punkt zu finden, welcher so liegt, daß die von ihm an den Kreis gezogene Tangente doppelt (dreimal) so groß ist als die Entfernung des Punktes vom Kreise.

452. Eine gegebene Sehne eines Kreises so zu verlängern, daß die vom Endpunkte der Verlängerung an den Kreis gelegte Tangente der Sehne selbst gleich wird.

453. In einem gegebenen Dreieck eine Parallele zur Grundlinie so zu ziehen, daß sie die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Abschnitten einer Seite wird.

454. Ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren,
α) in dem die Hypotenuse gegeben und die kleinere Kathete der Projektion der größeren Kathete auf die Hypotenuse gleich ist;
β) in dem die Hypotenuse gegeben ist und die Seiten in stetiger Proportion stehen;
γ) in dem die Summe der Hypotenuse und einer Kathete gegeben, die andere Kathete aber die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden erstgenannten Seiten ist.

455. Man soll durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels liegenden Punkt eine Gerade so ziehen, daß die Summe (oder das Produkt) aus den Abschnitten, welche die Gerade auf den Schenkeln macht, einer gegebenen Strecke c (einem Quadrate c^2) gleich ist. (Welches ist der kleinste Wert von c?)

456. Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse a und dem Radius r des eingeschriebenen Kreises zu konstruieren.

457. Ein Rechteck zu konstruieren, dessen Diagonale = c ist, und welches mit einem Rechteck von den Seiten a und b gleichen Inhalt hat.

458. Ein Rechteck in ein anderes zu verwandeln, dessen Diagonale doppelt so groß ist als die des gegebenen.

459. Man soll ein gleichschenkliges Dreieck zeichnen, von dem gegeben sind

α) die Summe (a) aus Basis und Schenkel und die Höhe h;

β) die Summe aus Basis und Höhe und der Radius des umgeschriebenen Kreises.

460. Man soll einen Kreis zeichnen, der einen gegebenen Halbkreis und dessen Durchmesser berührt, und zwar letzteren in einem gegebenen Punkte.

461. Man soll in ein Quadrat von der Seite a ein gleichseitiges Dreieck zeichnen, so daß ein Eck des Dreiecks in einem Ecke des Quadrates liegt und die beiden andern Ecken auf Quadratseiten liegen.

462. Man soll in ein Quadrat ein neues Quadrat einzeichnen, so daß die Ecken des neuen auf den Seiten des alten liegen und die Flächen sich verhalten wie m : n.

463. In einem Kreis sind zwei senkrechte (drei unter je 60^0 geneigte) Durchmesser gezogen, man soll eine Sehne ziehen, welche die Durchmesser schneidet und dadurch in drei (vier) gleiche Teile geteilt wird.

464. Man soll ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, von welchem gegeben sind

α) die Mittellinien, die zu den Katheten führen,

β) die von einer Winkelhalbierungslinie auf einer Kathete gemachten Abschnitte.

465. Nach irgend einem Punkte der Grundlinie eines Dreiecks ist von dessen Spitze eine Transversale gezogen. Man soll zur Grundlinie eine Parallele so ziehen, daß das Rechteck aus ihren durch die Transversale gemachten Abschnitten eine bestimmte Größe (a^2) erhält.

466. Von den Ecken eines Quadrates so viel durch gerade Linien abzuschneiden, daß ein reguläres Achteck übrig bleibt.

467. Eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das m-fache Quadrat des einen Teiles gleich dem Rechteck aus der ganzen Strecke und dem andern Teile ist.

468. Gegeben ist ein Kreis (Radius = r) und ein Punkt außerhalb desselben (Abstand vom Kreise = a); man soll durch den Punkt eine Sekante ziehen, so daß

α) das Stück der Sekante außerhalb des Kreises = b ist;

β) der äußere Abschnitt der Sekante sich zum innern wie b : c verhält;

γ) die Abschnitte der Sekante sich umgekehrt verhalten wie die Abschnitte des durch den Punkt führenden Durchmessers;

δ) die Sekante im goldenen Schnitt geteilt wird, und zwar soll zuerst das im Kreis liegende Stück, dann das außerhalb liegende Stück das größere sein;

ε) das im Kreis liegende Stück die mittlere geometrische Proportionale ist zwischen dem Durchmesser und dem Abstand a des Punktes vom Kreise;

ζ) die Projektion des im Kreise liegenden Stückes der Sekante auf den durch den Punkt gehenden Durchmesser gleich einer gegebenen Strecke b ist;

η) die Projektion des durch den Punkt führenden Durchmessers auf die Sekante doppelt so groß ist als das im Kreise liegende Stück derselben;

ϑ) das Produkt der Abschnitte gleich einem Quadrate von der Seite a ist.

469. Gegeben: ein Kreis vom Radius r, zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser und auf der Verlängerung des einen ein Punkt, dessen Abstand vom Kreise a sei. Man soll durch den Punkt eine Sekante so ziehen, daß der äußere Abschnitt derselben gleich wird dem (größeren) Stücke der Sekante, welches zwischen der Peripherie und dem anderen Durchmesser liegt.

470. Von einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen doppelter Inhalt dem Quadrat des Unterschiedes der Katheten gleich ist, kennt man die Hypotenuse, wie groß sind die Katheten?

471. In einen Kreisausschnitt ein Quadrat so zu zeichnen, daß die eine Seite auf dem einen Radius, das 3. Eck auf dem andern Radius und das 4. Eck auf dem Kreisbogen liegt.

472. In der durch die Strecke AB = a gehenden Geraden einen Punkt so zu bestimmen, daß die Quadrate der Abstände dieses Punktes von A und B sich wie m : n verhalten.

473. Gegeben ist ein Halbkreis, an welchen in einem Endpunkte des Durchmessers eine Tangente gelegt ist. Man soll einen Kreis beschreiben, der durch den andern Endpunkt des Durchmessers geht, seinen Mittelpunkt auf der Kreisperipherie hat und die Tangente berührt.

474. Gegeben sind ein Kreis, eine Gerade und auf dieser ein Punkt; man soll einen Kreis zeichnen, der den Kreis und die Gerade in dem gegebenen Punkte berührt.

475. In ein gegebenes Rechteck ein anderes von der halben Größe einzuzeichnen, dessen Seiten von denen des gegebenen überall gleich weit abstehen.

476. In einem über AC errichteten Halbkreise ist eine zum Durchmesser senkrechte Halbsehne MP gezogen, man soll durch A eine Sehne AB ziehen, welche MP in E so schneidet, daß EB gleich dem Radius wird.

477. Durch die Mitte einer Sehne eine Sehne von doppelter Länge zu ziehen.

478. Man soll in einen gegebenen Kreis fünf gleich große Quadrate zeichnen (eines in der Mitte, die andern an je eine Seite des mittleren anstoßend).

479. In einem Halbkreise sind über den beiden Hälften des Durchmessers noch zwei Halbkreise beschrieben; man soll einen Kreis zeichnen, der die drei Halbkreise berührt.

480. In einem Kreise sind zwei auf einander senkrechte Durchmesser gezogen, man soll vom Endpunkte des einen eine Sehne ziehen, welche den andren so schneidet, daß der jenseits des Schnittpunktes liegende Teil derselben einer gegebenen Strecke a gleich wird.

481. Über einer Strecke a als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu beschreiben, in welchem die eine Kathete das arithmetische Mittel aus den zwei andern Seiten ist.

482. In ein gleichseitiges Dreieck ein ebensolches einzuschreiben, so daß die Ecken des zweiten auf den Seiten das ersten liegen und

α) der Inhalt des zweiten halb so groß ist als der des ersten,

β) die Seiten des zweiten auf denen des ersten senkrecht stehen.

483. In ein gleichseitiges Dreieck ein Parallelogramm von gegebenem Inhalte zu konstruieren, so daß es mit dem Dreiecke einen Winkel gemeinsam hat, und das dem Winkelscheitel gegenüberliegende Eck des Parallelogramms auf die dritte Seite des Dreiecks fällt.

N. G. 484. Zwei gegebene Strecken a und b zum Teil so aufeinander zu legen, daß 4 harmonische Punkte entstehen.

485. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Seite des im rechten Winkel stehenden eingeschriebenen Quadrates $=$ a und der Radius des eingeschriebenen Kreises $=$ r gegeben, man soll das Dreieck zeichnen.

486. In einem Kreise ist ein Durchmesser gezogen und in dem einen Endpunkte desselben eine Tangente errichtet; man soll auf ihr einen Punkt so bestimmen, daß, wenn man durch ihn eine Sekante zieht, die folgenden drei Stücke der Sekante einander gleich werden: das Stück vom Punkte bis zum Kreise,

das Stück im Kreise, das Stück vom Kreise bis zum verlängerten Durchmesser.

487. Gegeben ist ein Quadrant; man soll in denselben zwei ähnliche gleichschenklige Dreiecke so zeichnen, daß ihre Spitzen auf der Kreisperipherie und ihre Grundlinien auf einem der begrenzenden Radien so liegen, daß ihre Summe dem Radius gleich ist.

488. In einem Kreise ist ein Durchmesser und an den einen Endpunkt desselben eine Tangente gezogen; man soll auf ihr einen Punkt so bestimmen, daß die von ihm an den andern Endpunkt des Durchmessers gezogene Sekante durch die Kreisperipherie im goldenen Schnitt geteilt wird, und zwar soll

α) der äußere Abschnitt der Sekante,

β) der im Kreis liegende Abschnitt das größere Stück sein.

488a. Die Abschnitte der eben beschriebenen Sekante sollen sich wie a : b verhalten.

489. In einem Kreise ist ein Punkt dadurch gegeben, daß sein Abstand (a) vom Mittelpunkte bekannt ist, man soll durch den Punkt zwei aufeinander senkrechte Sehnen ziehen, so daß die eine doppelt so groß ist als die andere.

490. In einem Halbkreise sind zwei kleinere Halbkreise gezogen, die auf dem Durchmesser aufstehen und sowohl einander als den Halbkreis berühren; man soll einen Kreis beschreiben, der die drei Halbkreislinien berührt.

491. In einem Kreise ist ein Durchmesser und eine darauf senkrechte Sehne gezogen; man soll eine Sehne ziehen, welche durch die zwei ersten Linien in drei gleiche Teile geteilt wird.

492. Gegeben: ein Kreis, zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, und auf einem derselben ein Punkt; man soll durch diesen Punkt eine Sehne ziehen, welche auch den andern Durchmesser schneidet, und so in drei Teile geteilt wird, von denen der mittlere das geometrische Mittel zwischen den beiden äußeren ist.

493. In einem stumpfwinkligen Dreiecke ist nach der größten Seite eine Transversale zu ziehen, so daß sie die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abschnitten wird.

494. Gegeben sind zwei sich von innen berührende Kreise; man soll senkrecht zum gemeinsamen Durchmesser eine Sehne ziehen, so daß der im größeren Kreise liegende Teil der Sehne doppelt so groß wird als der im kleineren Kreise.

Vierter Teil.

Eingeschriebene und umgeschriebene Polygone.

Cyklometrie.

I. Abschnitt.

Die linearen Dimensionen eingeschriebener und umgeschriebener Polygone.

218.

Erklärung. Man sagt von einem Polygon, es sei einem Kreise eingeschrieben, wenn seine Ecken in der Peripherie liegen, seine Seiten demnach Sehnen sind. Den Kreis nennt man in diesem Falle dem Polygon umgeschrieben.

Ein Polygon heißt dem Kreise umgeschrieben, wenn seine Seiten Tangenten des Kreises sind. Den Kreis nennt man in diesem Falle dem Polygon eingeschrieben.

Aus dem Bisherigen (56, 95) geht hervor, daß jedem Dreieck ein Kreis eingeschrieben und umgeschrieben werden kann, ferner wurde (109, 100) als erforderlich und hinreichend erkannt, daß im einzuschreibenden Vierecke zwei gegenüber liegende Winkel supplementär, im Tangentenvierecke hingegen die Summen der Gegenseiten gleich seien.

Im Folgenden werden auf die allgemeine Frage: Welche Bedingungen muß ein Polygon erfüllen, damit es einem Kreise eingeschrieben oder umgeschrieben werden könne, und durch welche Eigenschaften zeichnen sich solche Polygone vor anderen aus? einige spezielle Antworten gegeben.

219.

Möglichkeit des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises.

Lehrsatz. Um und in jedes reguläre Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. Der Schnittpunkt der senkrechten Halbierungslinien zweier anliegender Seiten ist a) von allen Ecken, b) von allen Seiten gleichweit entfernt. Berücksichtigt man, daß der Polygonswinkel halbiert ist, so folgt a) aus 48, b) aus 49.

Zusatz 1. Die Mittelpunkte des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises fallen in einen Punkt.

Zusatz 2. Die vom Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen Strahlen halbieren die Polygonswinkel, und je zwei benachbarte schließen gleiche Centriwinkel ein, welche zu den Polygonswinkeln supplementär sind.

Zusatz 3. Die vom Mittelpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen halbieren die Seiten des umgeschriebenen Polygons, und je zwei benachbarte schließen das Supplement des Polygonswinkels ein.

Zusatz 4. Die Ecken beziehungsweise Berührungspunkte des eingeschriebenen oder umgeschriebenen regulären n-Ecks teilen die Peripherie in n gleiche Teile.

220.

a) Teilt man die Peripherie in n gleiche Teile und zieht Herstellung des eingeschrieb. und umgeschrieb. Polygons.

α) die Verbindungsstrecken der Teilpunkte,

β) in jedem Teilpunkte eine Tangente an den Kreis,

so erhält man

α) ein eingeschriebenes,

β) ein umgeschriebenes reguläres n-Eck.

Beweis zu α) durch 105, 43, 112 Nr. 11;

zu β): Die Winkel sind gleich als Supplemente gleicher Centriwinkel; zur Gleichheit der Seiten verhilft, daß der an den Berührungspunkt gezogene Radius die Seite halbiert (49).

b) Zieht man zu den Seiten eines eingeschriebenen regulären n-Ecks parallele Tangenten, so begrenzen diese ein umgeschriebenes reguläres n-Eck.

Der Beweis wird auf a) zurückgeführt.

Zusatz. Das von den parallelen Tangenten begrenzte reguläre n-Eck ist dem nach a) β) konstruierten kongruent.

c) Zieht man die auf den Seiten des eingeschriebenen regulären n-Eckes senkrechten Radien und verbindet deren Endpunkte mit den nächstliegenden beiden Ecken, so erhält man ein eingeschriebenes reguläres 2n-Eck.

Legt man in den Punkten, in welchen die vom Centrum nach den Ecken eines umgeschriebenen regulären n-Eckes gezogenen Strecken die Kreislinie schneiden, Tangenten an den Kreis, so entsteht ein umgeschriebenes reguläres 2n-Eck.

Zusatz. Die Seite des eingeschriebenen regulären 2n-Eckes ist größer als die halbe Seite des n-Eckes, der Umfang des ersteren Polygons größer als der des letzteren. Die Seite des umgeschriebenen regulären 2n-Eckes ist kleiner als die halbe Seite des n-Eckes, der Umfang des ersteren Polygons kleiner als der des letzteren.

221.

Bedingungen unter denen eingeschrieb. und umgeschr. Polygone regulär sind.

Lehrsätze. a) Ist ein eingeschriebenes Polygon gleichseitig, so ist es regulär.

b) Ist ein eingeschriebenes Polygon gleichwinklig und von ungerader Seitenzahl, so ist es regulär.

Beweis. Man ziehe die Radien nach den Ecken. Diese bilden gleichschenklige Dreiecke und teilen die Polygonswinkel. Der Satz ist erwiesen, wenn die beiden Teile eines beliebigen Polygonswinkels als gleich erkannt sind (112 Nr. 12). Sind diese Winkel, in einem Sinne herumgezählt,

$$A_1 = \alpha_1 + \beta_1$$
$$A_2 = \alpha_2 + \beta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \alpha_n + \beta_n$$

so folgt leicht $\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_4 = \alpha_5 \ldots = \beta_{2r} = \alpha_{2r+1}$

Ist nun n eine ungerade Zahl, also von der Form $(2r + 1)$, so ist

$\alpha_{2r+1} = \alpha_1$ (identisch)

und nach 43 $\beta_{2r+1} = \alpha_1$

somit A_{2r+1} durch den Radius halbiert.

c) Ist ein umgeschriebenes Polygon gleichwinklig, so ist es regulär.

d) Ist ein umgeschriebenes Polygon gleichseitig und von ungerader Seitenzahl, so ist es regulär.

Der Beweis, nach dem Muster in b) geführt, gibt zum Resultate, daß eine beliebige Seite im Berührungspunkte halbiert ist. Der obige gilt Wort für Wort, wenn man unter A die Seite, unter α und β deren Teile versteht.

Anmerkung. Das Viereck gibt Beispiele zu den vorstehenden Sätzen.

Gleichungen zwischen den linearen Dimensionen der eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone.

222.

Lehrsatz. Die zur Seite a gehörige Höhe (h_a) eines eingeschriebenen Dreiecks ist die vierte Proportionale zu dem Durchmesser und den beiden anderen Seiten. Das Dreieck.

Behauptung. $2r : b = c : h_a$

Beweis. Man zieht den Durchmesser durch A und wendet 108 Zus. 2, 108 Zus. 1, 185 an.

222a. Legt man durch die Endpunkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks und durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises eine Kreislinie, so gilt für jeden Punkt dieser Kreislinie, daß sein Abstand von der Grundlinie die mittlere geometrische Proportionale zu seinen Abständen von den Schenkeln ist.

Beweis. Die Schenkel sind Tangenten. 200c. 222.

223.

Lehrsatz. Bezeichnet in einem Dreiecke w_a die Transversale, welche den Winkel A halbiert, b und c die den Winkel einschließenden Seiten, m und n die Abschnitte der Gegenseite, so ist Die Winkelhalbierungstransversale.

$$w_a{}^2 = bc - mn$$

Beweis. Man verlängert w_a bis zur Peripherie des umgeschriebenen Kreises und wendet 199 und 185 an.

Zusatz. Da wegen $m + n = a$ und $\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$,

$$n = \frac{ac}{b + c}, \quad m = \frac{ab}{b + c},$$

so läßt sich gleich der Höhe (161) und der Mittellinie (160 Nr. 3) auch die Halbierungslinie des Winkels durch die drei Seiten ausdrücken:

$$w_a = \frac{1}{b + c}\sqrt{bc\,(a + b + c)\,(b + c - a)}.$$

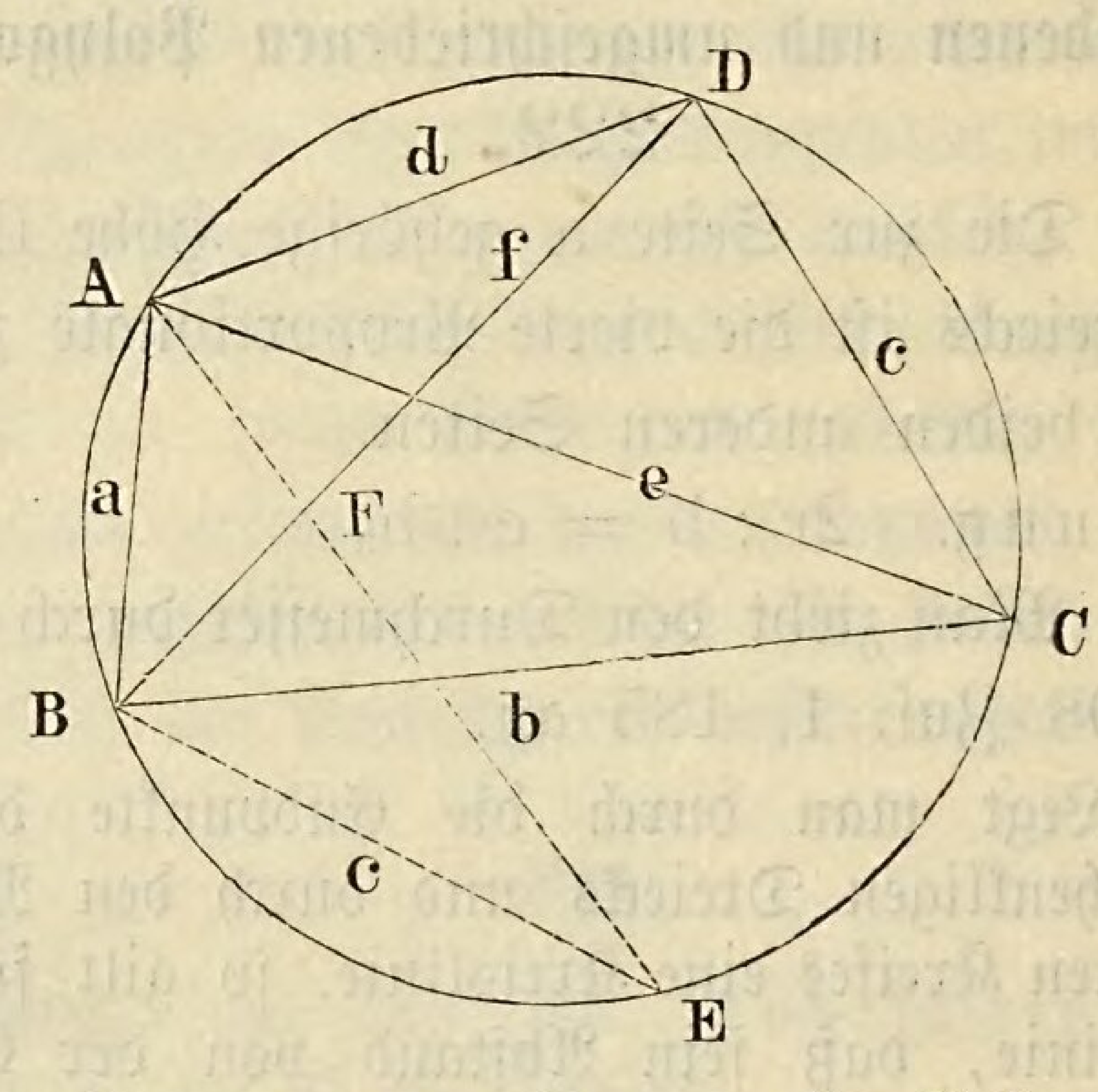
224.

Lehrsätze. a) Im Sehnenvierecke ist das Produkt der beiden Diagonalen gleich der Summe der Produkte der gegenüber liegenden Seiten. (Ptolemäischer Lehrsatz.*) Sehnenviereck.

*) Ptolemäus, Astronom in Alexandria 140 nach Chr.

Produkt der Diagonalen.

Behauptung. $ef = ac + bd$



Beweis. Trage c von B aus als Sehne ein, ziehe AE. Diese teilt die Diagonale f in F.

Nun ist $\triangle$ AFB $\backsim$ ADC, $\triangle$ AFD $\backsim$ ABC. Durch Addition der Werte, welche man aus hiernach geltenden Proportionen für BF und DF erhält, kommt man auf die Behauptung.

Verhältnis der Diagonalen.

b) Im Sehnenvierecke verhalten sich die Diagonalen wie die Summen der Produkte der in ihren Endpunkten zusammenstoßenden Seiten.

Behauptung: $e : f = (ad + bc) : (ab + cd)$.

Beweis. Zieht man die Höhen h_e und h'_e auf die Diagonale e, h_f und h'_f auf f, so erhält man als doppelten Ausdruck für die Fläche des Vierecks

$$\frac{1}{2} e h_e + \frac{1}{2} e h'_e = \frac{1}{2} f h_f + \frac{1}{2} f h'_f.$$

Nach 222 ist: $h_e = \frac{cd}{2r}$, $h'_e = \frac{ab}{2r}$, $h_f = \frac{ad}{2r}$, $h'_f = \frac{bc}{2r}$.

Substitution führt auf die Behauptung.

Werte der Diagonalen.

Zusatz. Durch Verbindung der Gleichungen in a) und b) erhält man:

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Beide Werte gehen in einander über, wenn man b mit d oder a mit c vertauscht.

225.

Lehrsätze. a) die Seite s_n des in den Kreis vom Radius r eingeschriebenen regulären n-Ecks und die Seite u_n des demselben Kreise umgeschriebenen regulären n-Ecks stehen zu einander in der Beziehung: Beziehungen zw. den Seiten der einge- schrieb. und umgeschrieb. Polygone.

$$u_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}},$$

oder

$$s_n = \frac{u_n}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{u_n}{r}\right)^2}},$$

wie aus 185 Zus. 1 und 156 erhellt.

Anmerkung. Die vom Centrum auf die Seite s_n gefällte Senkrechte, deren Länge $\sqrt{r^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$ ist, heißt Apothema.

b) die Seite s_n steht zu der Seite s_{2n} des eingeschriebenen regulären 2n-Eckes in der Beziehung:

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_s}{r}\right)^2}},$$

oder

$$s_n = 2\, s_{2n}\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_{2n}}{r}\right)^2}.$$

Ableitung. Man drückt die Verlängerung des Apothema doppelt aus, einmal nach 156, dann als Differenz des Radius und Apothema. 156.

c) Die Seite u_n steht zu der Seite u_{2n} des umgeschriebenen regulären 2n-Eckes in der Beziehung

$$u_n = \frac{2\, u_{2n}}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{u_{2n}}{r}\right)^2},$$

oder

$$u_{2n} = \frac{4\, r^2}{u_n}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{u_n}{r}\right)^2}\right].$$

Ableitung algebraisch aus a) und b) oder unmittelbar geometrisch.

Zusatz. Durch Elimination des Radius leitet man fol-

gende einfache Beziehungen zwischen den Seiten der vier genannten regulären Polygone ab:

$$u_{2n} = \frac{s_n\, u_n}{s_n + u_n},\quad s_{2n}^2 = \frac{s_n\, u_{2n}}{2},$$

welche nach Ermittelung von u_n und s_n mit Vorteil zur Fortführung der Rechnung (oder Konstruktion) benützt werden.

Beziehung zwischen den Umfängen. Setzt man die Umfänge $n s_n = \Sigma_n$, $n u_n = Y_n$,

$$2 n s_{2n} = \Sigma_{2n},\quad 2 n u_{2n} = Y_{2n},$$

so folgt $Y_{2n} = \dfrac{2\,\Sigma_n\, Y_n}{\Sigma_n + Y_n}$, $\Sigma_{2n}^2 = \Sigma_n \cdot Y_{2n}$.

226.

Lehrsatz. Die Seiten und somit auch die Perimeter regulärer n-Ecke verhalten sich wie die Radien (r) der ihnen umgeschriebenen und wie die Radien (ϱ) der ihnen eingeschriebenen Kreise. 181. 195.

$$s_n : s'_n = \Sigma_n : \Sigma'_n = r : r' = \varrho : \varrho'.$$

227.

Seitenlänge. **Seitenlänge eingeschriebener und umgeschriebener regulärer Polygone.**

a) Für das reguläre Dreieck ist

$$s_3 = r\sqrt{3},\quad u_3 = 2r\sqrt{3}$$

b) Für das reguläre Viereck ist

$$s_4 = r\sqrt{2},\quad u_4 = 2r.$$

c) Für das reguläre Sechseck ist

$$s_6 = r,\quad u_6 = \tfrac{2}{3} r\sqrt{3}.$$

d) Für das reguläre Zehneck ist

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Ableitung. Der Centriwinkel beträgt $\frac{2}{5}$ R oder 36°. Somit wird s_{10} erhalten, wenn man den größeren Teil des durch den goldenen Schnitt geteilten Radius als Sehne aufträgt. C 412.

e) Für das reguläre Fünfeck ist

$$s_5 = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

wie sich aus d) und 225b ergibt.

f) Für das reguläre Fünfzehneck ist

$$s_{15} = \frac{r}{4}\left[\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right].$$

Ableitung. Der Centriwinkel dieses Polygons ist $\frac{4}{15}$ R oder $24^0 = 60^0 - 36^0$, woraus sich die Konstruktion der Seite mit Hilfe von c) und d) ergibt. Um zur Berechnung 224 a verwenden zu können, ergänze man das durch die Konstruktion erhaltene Dreieck zum Sehnenvierecke mittelst eines Durchmessers, welcher durch den gemeinschaftlichen Endpunkt von s_{10} und s_6 geht. 108 Zus. 2. 156. Man erhält zunächst

$$s_{15} = \frac{1}{2r}\left[s_6 \sqrt{4r^2 - s_{10}^2} - s_{10}\sqrt{4r^2 - s_6^2}\right]$$

Aufgabe. Es soll die Seite des umgeschriebenen Zehnecks und die des umgeschriebenen Fünfecks berechnet werden.

Lösung. $u_{10} = 2r\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}}$, $u_5 = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

228.

Übungen. 1. Die Summe der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist um den Durchmesser des eingeschriebenen Kreises größer als die Hypotenuse.

2. Die Diagonalen des regulären Fünfecks sind einander gleich. Zieht man alle möglichen, so ist jeder Polygonswinkel in 3 gleiche Teile geteilt; die 5 Schnittpunkte der Diagonalen sind die Ecken eines regulären Fünfecks.

3. In jedem Sehnensechsecke liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden Seiten (der 1ten und 4ten, 2ten und 5ten, 3ten und 6ten) in gerader Linie. (Pascal † 1662.)

Zum Beweise wird dreimal 199, dreimal 173, dann 174 b auf das Dreieck angewendet, welches man durch Verlängerung der 1ten, 3ten, 5ten Seite erhält.

II. Abschnitt.

Flächeninhalt eingeschriebener und umgeschriebener Polygone.

229.

Dreieck. **Fläche des Dreiecks.** a) Die Fläche F des in den Kreis vom Radius r eingeschriebenen Dreiecks ABC ist

$$F = \frac{abc}{4r}.$$

Beweis durch 222.

Zusatz. Durch Vermittelung von 161 läßt sich r in den drei Seiten des Dreiecks ausdrücken. Ist $s = \frac{a+b+c}{2}$ so wird

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

b) Die Fläche Q des um den Kreis vom Radius ϱ beschriebenen Dreiecks ABC ist

$$Q = \frac{\varrho}{2}(a+b+c),$$

daher, wenn $s = \frac{a+b+c}{2}$,

$$\varrho = \frac{1}{s}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

c) Die Radien ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c der Kreise, welche dem Dreiecke ABC so angeschrieben sind, daß sie beziehungsweise die Seiten a, b, c berühren, sind

$$\varrho_a = \frac{1}{s-a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\varrho_b = \frac{1}{s-b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\varrho_c = \frac{1}{s-c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ableitung. Der Inhalt des Vierecks, dessen vier Ecken A, B, C und der Mittelpunkt des angeschriebenen Kreises sind, wird durch $\varrho_a \cdots$ und die Seiten ausgedrückt, dann 161 angewendet.

Zusatz 1. Die Entfernungen der 12 Berührungspunkte von den Ecken sind durch die Strecken (s—a), (s—b), (s—c) gegeben.

Zusatz 2. $F = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}$.

230.

Fläche des Sehnenvierecks. Da die Diagonale f nach 224 Z. durch die vier Seiten ausgedrückt werden kann, so läßt sich nach 161 jedes der beiden Dreiecke, in welche das Viereck durch f zerlegt wird, durch die Seiten ausdrücken. Durch Addition erhält man die Fläche des Vierecks. Sehnenviereck.

Es ist nach 161 (erste Formel):

$$(4F_1)^2 = (2ad)^2 - (a^2 + d^2 - f^2)^2$$

$$(4F_2)^2 = (2bc)^2 - (b_2 + c^2 - f^2)^2.$$

Da nun der Wert von f^2 unverändert bleibt, wenn man durchaus zugleich a mit b, d mit c vertauscht, andererseits aber durch diese Vertauschung $(4F_1)^2$ in $(4F_2)^2$ übergeht, so kann man sich zunächst auf die Behandlung von F_1 beschränken und durch schließliche Vertauschung der Seiten F_2 ableiten.

$$(4F_1)^2 = (2ad)^2 - \left[ad\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{ad+bc}\right]^2$$

$$(4F_1)^2 = \left(\frac{ad}{ad+bc}\right)^2 \left[(a+d)^2-(b-c)^2\right]\left[(b+c)^2-(a-d)^2\right]$$

$$F_1 = \frac{ad}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

worin $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ bedeutet.

$$F_2 = \frac{bc}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$F = F_1 + F_2 = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Anmerkung. Die Berechnung von F kann auch auf 191 zurückgeführt werden, wenn man 2 converg. Seiten bis zum Durchschnitt verlängert und 184 anwendet.

231.

Verhältnis der Flächen regulärer Polygone.

a) Die Flächen regulärer n-Ecke verhalten sich wie die Radienquadrate*) der ihnen umgeschriebenen und wie die Radienquadrate der ihnen eingeschriebenen Kreise. Verhältnis der Flächen.

Bezeichnet man mit F_n, F'_n die Flächen der regulären

*) Mit Rücksicht auf die Regel, welche die deutsche Sprache ausnahmslos bei Bildung zusammengesetzter Wörter befolgt, dürfte „Radienquadrate" der mit gleicher Bedeutung versuchten Zusammensetzung „Quadratradien" vorzuziehen sein.

n-Ecke, welche Kreisen von den Radien r, r' eingeschrieben sind, mit Q_n, Q'_n die Flächen der umgeschriebenen n-Ecke, so ist

Behauptung. $F_n : F'_n = r^2 : r'^2$.

$Q_n : Q'_n = r^2 : r'^2$. 181. 196.

b) Denkt man sich um und in einen Kreis vom Radius r ein reguläres n-Eck beschrieben, so ist $Q_n : F_n = u_n^2 : s_n^2$, daher verhalten sich die beiden Flächen (nach 189) auch wie das Quadrat des Radius zum Quadrate des Apothema, oder nach 225 a

$$Q_n : F_n = 1 : \left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2\right].$$

Da (nach 226) $s_n = 2r\sigma'_n$ wenn man mit σ'_n die Seite des regulären n-Eckes bezeichnet, welches dem Kreise vom Durchmesser 1 eingeschrieben ist, so folgt

$$Q_n : F_n = 1 : [1 - (\sigma'_n)^2].$$

Das Verhältnis der Fläche des einem beliebigen Kreise umgeschriebenen n-Eckes zu der Fläche des eingeschriebenen n-Eckes ist somit nur von der Seitenzahl n abhängig.

232.

Maß der Flächen regulärer Polygone.

Maß der Flächen.

a) Die Fläche Q_n des umgeschriebenen regulären n-Ecks ist dem halben Produkte aus dem Radius in den Umfang gleich.

$$Q_n = \frac{1}{2} r Y_n.$$

Zusatz 1. Man erhält die Fläche des dem Kreise vom Radius r umgeschriebenen regulären n-Ecks, wenn man den Umfang Y'_n des dem Kreise vom Durchmesser 1 umgeschriebenen regulären n-Eckes mit dem Quadrate des Radius multipliziert.

$Q_n = r^2 Y'_n$*) [Nach 226 ist $Y_n = 2r Y'_n$].

Zusatz 2. Für die Fläche des regulären n-Ecks, welches dem Kreise vom Durchmesser 1 umgeschrieben ist, gilt

$$4 Q'_n = Y'_n$$

d. h. die Maßzahl des umgeschriebenen Perimeters ist viermal so groß als die Maßzahl der Fläche.

b) Die Fläche F_n des eingeschriebenen regulären n-Ecks ist dem halben Produkte aus dem Apothema in den Umfang gleich.

$$F_n = \frac{1}{2} r \Sigma_n \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{s_n}{r}\right)^2}.$$

*) Man beachte die Bedeutung von Y'_n und der folgenden Σ'_n und σ'_n als Koefficienten der Längeneinheit.

Zusatz. Bezeichnet Σ'_n den Umfang, σ'_n die Seitenlänge des dem Kreise vom Durchmesser 1 eingeschriebenen n-Ecks, so ist

$$F_n = r^2 \Sigma'_n \sqrt{1 - (\sigma'_n)^2}.$$

c) Als Beziehungen zwischen den Flächen der regulären n-Ecke und 2n-Ecke leitet man mit Hilfe von 225 3. und des Vorstehenden folgende nützliche Gleichungen ab: Beziehungen zwischen den Flächen regul. Polygone.

$$Q_{2n} = Q_n \frac{Y_{2n}}{Y_n}; \quad F_{2n} = F_n \frac{Y_n}{\Sigma_n};$$

$$F_{2n}^2 = F_n Q_n; \quad Q_{2n} = \frac{2 F_n Q_n}{F_n + F_{2n}};$$

von welchen die letzten sich auch direkt geometrisch nachweisen lassen. Vgl. Legendre El. d. G., übersetzt von Crelle, Buch IV, Satz 13.

233.

Inhalt einiger regulären Polygone.

Besondere Flächen.

a) Es ist für das reguläre Dreieck

$$F_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}, \quad Q_3 = 3 r^2 \sqrt{3};$$

b) für das reguläre Viereck

$$F_4 = 2 r^2, \quad Q_4 = 4 r^2;$$

c) für das reguläre Sechseck

$$F_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}, \quad Q_6 = 2 r^2 \sqrt{3}.$$

Anmerkung. Man kann zur Übung die in 232 aufgestellten Sätze und Beziehungen an diesen Flächen nachweisen und mit Hilfe derselben und 227 weitere reguläre Polygone berechnen.

III Abschnitt.

Cyklometrie.

Vergleichung zwischen dem Umfange der eingeschriebenen und umgeschriebenen Polygone einerseits und der Peripherie anderseits.

234.

Lehrsätze. a) Der Perimeter eines eingeschriebenen Polygons ist kleiner als die Peripherie. 15. Die Peripherie liegt zwischen den beiden Perimetern.

b) Man kann die Seitenzahl eines eingeschriebenen Poly-

gons so vergrößern, daß sich der Umfang desselben der Peripherie des Kreises als Grenze nähert.

Beweis. Man kann durch eine Vermehrung der Seitenzahl, welche man z. B. durch Halbierung von Bögen ausführt, den Umfang des eingeschriebenen Polygons immer mehr vergrößern. Damit ist indessen noch nicht bewiesen, daß gerade die Peripherie die Grenze ist, welcher man dabei beliebig nahe kommt.

Nehmen wir deßhalb an, es gebe einen größten Umfang, dem man sich durch Vermehrung der Seitenzahl beliebig nähert, und untersuchen seine Eigenschaften.

In dem größtmöglichen Umfange gibt es keine Seite von angebbarer Länge, weil man jede solche Seite (Sehne) noch mit zwei anderen überspannen könnte, deren Summe größer wäre als die überspannte.

Folglich kann kein Punkt des größtmöglichen Umfangs innerhalb des Kreises liegen, weil ein solcher Punkt einer Sehne von angebbarer Länge angehören müßte. Somit liegen alle Punkte des größtmöglichen Umfanges in der Peripherie.

Ferner erkennt man, daß jeder beliebige Punkt der Peripherie zugleich ein Punkt des größtmöglichen Umfanges sein muß; denn wäre ein Punkt der Peripherie nicht Eck des eingeschriebenen Polygons von größtem Umfange, so könnte man durch Verbinden dieses Punktes mit den zwei nächstgelegenen Ecken einen größeren Umfang herstellen.

Da nun jeder Punkt des größtmöglichen Umfangs der Peripherie, und jeder Punkt der Peripherie dem größtmöglichen Umfange angehört, so sind beide identisch.

c) Der Perimeter Y eines umgeschriebenen Polygons ist größer als die Peripherie.

Beweis. Wäre dieses nicht der Fall, so müßte $Y = P$ oder $Y < P$ sein. Wäre $Y = P$, so könnte man immer durch Ziehen einer Tangente an einen zwischenliegenden Punkt ein umgeschriebenes Polygon $Y' < Y$ herstellen, welches demnach auch kleiner als P sein müßte. Es ist also nur zu zeigen, daß der Umfang eines umgeschriebenen Polygones nicht kleiner sein kann als die Peripherie.

Wäre $Y < P$, also $P - Y = d$, so ließe sich nach b) ein eingeschriebenes Polygon Σ von soviel Seiten konstruieren, daß $P - \Sigma < d$ wäre. Nun hätte man

$$\begin{array}{r} P - Y = d \\ P - \Sigma < d \\ \hline \Sigma > Y \end{array}$$

im Widerspruche mit 88c.

Zusatz. Da $Y_n > P > \Sigma_n$, so ist der Unterschied zwischen dem Umfange des umgeschriebenen und eingeschriebenen n-Eckes größer als der Unterschied zwischen einem dieser Perimeter und der Peripherie.

235.

Berechnung der Peripherie vom Durchmesser Eins.

Es ist ein Kreis vom Durchmesser Eins gegeben, man soll die Länge seiner Peripherie ermitteln. Die Ludolphische Zahl.

Es ist bisher nicht gelungen, die Maßzahl dieser Peripherie in geschlossener Form, d. h. als Resultat einer endlichen Zahlenverbindung (Wurzel, Logarithmus . . .) darzustellen. Man besitzt indessen ein sicheres Verfahren, diese Zahl mit jeder beliebigen Annäherung zu berechnen. Dieses Verfahren besteht darin, daß man den Umfang sowohl des eingeschriebenen als des umgeschriebenen n-Eckes für ein so großes n berechnet, daß der Unterschied beider Perimeter nicht größer ist, als die in einem vorliegenden Falle noch zulässige Abweichung der als Länge der Peripherie benützten Zahl von der wahren Länge. Ist es z. B. in einem besonderen Falle erforderlich, die Peripherie bis auf die 6. Dezimale genau zu kennen, so hat man die Perimeter Σ'_n und Y'_n für ein so großes n zu berechnen, daß $Y'_n - \Sigma'_n \leqq \frac{5}{10^7}$. Dann ist, wenn man die wirkliche Länge der Peripherie mit π bezeichnet, nach 234 Z.

$$\pi - \Sigma'_n < \frac{5}{10^7}.$$

Somit wird die für diesen Fall erforderliche Genauigkeit erreicht, wenn man statt des unbekannten π das berechnete Y'_n oder Σ'_n in Rechnung bringt.

Man hat nun, um für jeden möglichen Fall einen genäherten Wert von π von der gewünschten Genauigkeit bereit zu haben, ein für allemal die Perimeter Σ'_n und Y'_n für sehr große n berechnet und findet, wenn man vom Sechsecke ausgeht:

n	Σ'_n	Y'_n
6	3,0000	3,4641
12	3,1058	3,2154
24	3,1326	3,1597
48	3,1394	3,1461
96	3,1410	3,1427

Somit ist π um weniger als 0,0017 von Σ'_{96} verschieden. Ludolph van Ceulen (1596) hat zuerst die Rechnung soweit fortgesetzt, bis Σ'_n und Y'_n in den ersten 35 Dezimalstellen übereinstimmten. Man kennt also seit dieser Zeit die Zahl π auf 35 Dezimalen genau und nennt sie nach ihrem Berechner die Ludolphische Zahl.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288 \pm \delta^{*})$$

$$\text{wobei } \delta < \frac{5}{10^{36}} \text{ ist.}$$

Anmerkung. Schon Archimedes fand durch Vergleichung der 96-Ecke $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{73}$. Der Archimedische Näherungswert $\frac{22}{7}$ [$= 3{,}1428\ldots$] reicht für diejenigen Rechnungen aus, in welchen es auf eine Einheit der 3. Dezimale von π nicht ankommt. Metius, ein Zeitgenosse Ludolph van Ceulens, gab für π den Näherungswert $\frac{355}{113}$ [$=3{,}1415929\ldots$] der auf 6 Dezimalen genau ist.

236.

Umfang des Kreises vom Durchmesser 2r. Aus 226 folgt, daß sich die Perimeter eingeschriebener regulärer n-Ecke wie die Durchmesser der zugehörigen Kreise verhalten und daß diese Poportion besteht, wie groß auch n genommen wird. Da sich ferner nach 234 b das reguläre n-Eck mit wachsender Seitenzahl dem Kreise unendlich nähert, so ist wahrscheinlich, daß auch für die Peripherie zweier Kreise (P_1, P_2) die Proportion gilt:

*) π ist später ohne Nutzen bis auf 140 Stellen genau berechnet worden.

$$P_1 : P_2 = (2r_1) : (2r_2).$$

Setzt man $2r_2 = 1$, so wird (nach 235) $P_2 = \pi$, und man induziert somit den

Lehrsatz. Bezeichnet P die Länge der Peripherie vom Durchmesser 2r, während π die Peripherie vom Durchmesser 1 ist, so ist

$$P = 2r\pi.$$

Beweis. Wäre $\frac{P}{2r}$ nicht gleich π, so müßte es entweder $\pi + \delta$ oder $\pi - \delta$ sein, wobei δ irgend eine Zahl bezeichnet.

Wäre nun $$\frac{P}{2r} = \pi + \delta,$$

so könnte man n so groß nehmen, daß der Unterschied zwischen dem Umfang (Y'_n) des n-Eckes, welches um den Kreis vom Durchmesser 1 beschrieben ist, und der Peripherie (π) kleiner wie δ wird; daß also

$$Y'_n - \pi < \delta,$$
$$Y'_n < \pi + \delta,$$
$$\text{(subst.)}\ Y'_n < \frac{P}{2r}$$
$$2rY'_n < P$$

wird. Nun ist (nach 226) $2r\,Y'_n$ der Perimeter des dem Kreise vom Radius r umgeschriebenen n-Eckes, daher ist der letzte Schluß nach 234c unmöglich. Ähnlich beweist man durch Vergleichung mit dem eingeschriebenen Polygon, daß $\frac{P}{2r} = \pi - \delta$ unmöglich ist.

237.

Lehrsätze. a) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien. 236. Verhältnis der Bögen von verschiedenen Radien.

b) Der Bogen a_1 von n Graden hat im Kreise vom Radius r_1 die Länge

$$a_1 = \frac{n}{180} r_1 \pi. \quad \text{[Nach 106]}.$$

Der Bogen a_2 von n Graden im Kreise vom Radius r_2 ist

$$a_2 = \frac{n}{180} r_2 \pi,$$

woraus $$a_1 : a_2 = r_1 : r_2,$$

d. h. die in Kreisen von verschiedenen Radien zu gleichen Centriwinkeln gehörigen Bögen verhalten sich wie die Radien der Kreise.

Eben diese Bögen verhalten sich auch wie die zugehörigen Sehnen.

c) Hat in absolutem Maße ein Winkel die Größe α, d. h. ist der um seinen Scheitel mit dem Meter (als Radius) beschriebene Kreisbogen α Meter lang, so hat der mit dem Radius r beschriebene Bogen a, welcher zwischen den Schenkeln desselben Winkels liegt, die Länge

$$a = r\alpha$$

wie aus der Proportion

$$a : \alpha = r : 1$$ folgt.

d) Es wurde oben (106 Zus. 2) der Winkel Eins genannt, welcher in dem mit der Längeneinheit als Radius beschriebenen Kreise zu dem Bogen von der Länge Eins als Centriwinkel gehört. Man ist nun im Stande, dieses Winkelmaß mit dem zuerst eingeführten (relativen) Maße R zu vergleichen, indem man aus

$$1 = \frac{n_1}{180} \pi$$

die Anzahl der Gerade berechnet, welche dem Winkel Eins zukommen, und findet:

$$n_1 = 57^0\, 17'\, 44{,}8''.$$

Anmerkung. Da $2r\pi = 2r \cdot 3 + 2r \cdot 0{,}14159 \ldots$ und $\sqrt{2} = 1{,}414 \ldots$, so ist mit einer für praktische Ausführungen in der Regel genügenden Annäherung

$$2r\pi = 3 \cdot 2r + \frac{r\sqrt{2}}{5}$$

d. h. die Peripherie ist nahezu um den 5ten Teil der Seite des eingeschriebenen Quadrates größer als der dreifache Durchmesser.

Ableitung des Ausdruckes für die Fläche des Kreises.

238.

Beliebige Annäherung der umgeschr. und eingeschr. Flächen.

Lehrsatz. Man kann durch Vergrößerung der Seitenzahl n bewirken, daß das Verhältnis der Fläche Q_n des umgeschriebenen regulären n-Eckes zu der Fläche F_n des eingeschriebenen um weniger als irgend eine noch so kleine gegebene Zahl von 1 verschieden ist.

Beweis. Nach 231 b ist wenn σ'_n die Seite desjenigen regulären n-Eckes bezeichnet, welches dem Kreise vom Durchmesser 1 eingeschrieben ist,

$$\frac{Q_n}{F_n} = \frac{1}{1-(\sigma'_n)^2}, \text{ somit } \frac{Q_n}{F_n} > 1.$$

Da $\sigma'_n = \frac{\Sigma'_n}{n}$ und $\Sigma'_n < \pi$, so ist $\frac{\pi}{n} > \sigma'_n$, und folglich

$$\frac{Q_n}{F_n} < \frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Zunächst überzeugt man sich, daß $\frac{1}{1-(\sigma_n)^2}$, der Wert von $\frac{Q_n}{F_n}$, bei wachsendem n immer kleiner wird, da bei unverändertem Zähler der Nenner zunimmt. Gesetzt nun, es müßte $\frac{Q_n}{F_n}$ trotzdem immer größer als $1+\delta$ bleiben, wobei δ irgend eine beliebig kleine bestimmte Zahl bedeutet, so wäre um so mehr für jedes noch so große n

$$\frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} > 1+\delta,$$

daraus würde $n < \pi\sqrt{\frac{1+\delta}{\delta}}$ folgen, was der Voraussetzung daß n beliebig groß genommen werden kann, widerspricht.

Zusatz. Da n so groß genommen werden kann, daß $\frac{Q_n}{F_n} < 1+\delta$, so folgt $Q_n - F_n < \delta F_n$, oder da $F_n < K$ (die Fläche des Kreises), so kann man bewirken, daß

$$Q_n - K_n < \delta K,$$

d. h. man kann n so groß nehmen, daß der Unterschied zwischen der Fläche des umgeschriebenen n-Eckes und des Kreises kleiner wird, als ein beliebig kleiner Bruchteil der Kreisfläche.

239.

Inhalt des Kreises. Aus 238 folgt, daß sich die Fläche Q_n des umgeschriebenen regulären n-Eckes durch Vergrößerung von n der Kreisfläche K unendlich nähert. Nun ist aber Q_n Fläche des Kreises.

$= \frac{1}{2}$ r Y_n, und Y_n nähert sich bei unendlich wachsendem n der Grenze $2r\pi$ (236). Somit nähert sich Q_n der Grenze $r^2\pi$, und es ist wahrscheinlich, daß $r^2\pi$ der exakte Ausdruck für die Größe der Kreisfläche ist. Auf diese Weise induziert man den

Lehrsatz: Der Flächeninhalt des Kreises vom Radius r ist

$$K = r^2\pi.$$

Beweis. Wäre K nicht gleich $r^2\pi$, so müßte es größer oder kleiner sein als $r^2\pi$.

a) Wäre $K > r^2\pi$, also $K - r^2\pi = f$, wobei f irgend eine Fläche vorstellen mag, so denke man sich dem Kreise das reguläre n-Eck umgeschrieben und eingeschrieben, und n so groß, daß $Q_n - F_n < f$. Dann ist umsomehr, weil nach (9) $Q_n > K > F_n$,

$$K - F_n < f$$

$$\text{(subst.)}\; K - F_n < K - r^2\pi$$

$$F_n > r^2\pi$$

oder, da nach 232b Z. $F_n = r^2\, \Sigma'_n \sqrt{1 - (\sigma'_n)^2}$,

$$\Sigma'_n \sqrt{1 - (\sigma'_n)^2} > \pi,$$

was unmöglich ist, weil nicht der eingeschriebene Perimeter Σ'_n, und noch weniger die linke Seite der Ungleichung größer sein kann als die Peripherie.

b) Wäre $K < r^2\pi$, also $r^2\pi - K = f$, wobei f irgend eine Fläche vorstellen mag, so beschreibe in und um den Kreis vom Radius r ein n-Eck von soviel Seiten, daß $Q_n - F_n < f$, dann würde um so mehr $Q_n - K < f$,

somit $Q_n - K < r^2\pi - K$,

$$Q_n < r^2\pi,$$

oder da nach 232a Z. 1 $Q_n = r^2 Y'_n$

$$Y'_n < \pi$$

was unmöglich ist, weil Y'_n als Perimeter des umgeschriebenen n-Eckes nicht kleiner sein kann, als die (zum gleichen Durchmesser 1 gehörige) Peripherie.

Zusatz 1. Die Fläche des Kreises ist einem Dreiecke gleich, welches die Peripherie zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Zusatz 2. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

240.

Inhalt von Teilen des Kreises. a) Die Fläche des Sektors, dessen Centriwinkel n Grade hat, ist Fläche des Sektors.

$$\text{Sektor} = \frac{n}{360}\, r^2\pi.$$

Hat der Bogen, welcher den Sektor begrenzt, die Länge a, so ist der Inhalt

$$\text{Sektor} = \frac{1}{2}\, a r,$$

d. h. der Sektor ist einem Dreiecke gleich, welches den Bogen zur Grundlinie und den Radius zur Höhe hat.

Der Beweis ergibt sich aus der Bemerkung, daß die Sektoren gleicher Kreise sich wie die Centriwinkel verhalten (105).

b) Das Segment, dessen Bogen n Gerade hat, ist zwar durch diese Angabe und den Radius vollkommen bestimmt, ebenso durch die Länge der Sehne und den Radius, nichts desto weniger reichen die bisherigen Mittel zur Berechnung des allgemeinen Falles nicht aus.

Beispiele. Das Segment zu berechnen, dessen Bogen 180^0, 90^0, 60^0, 45^0, 30^0, $22\frac{1}{2}^0$, 36^0, 18^0, 24^0 hat, wenn der Radius r ist.

Für welche Bögen läßt sich das Segment berechnen?

c) Der von den Peripherien zweier koncentrischer Kreise mit den Radien $r_1 > r_2$ begrenzte Ring hat die Fläche

$$\pi\,(r_1^2 - r_2^2),$$

was in der Form $\frac{2\,r_1\pi + 2\,r_2\pi}{2}(r_1 - r_2)$, dargestellt werden kann. Er ist also einem Trapeze gleich, welches die beiden Peripherien zu parallelen Seiten und die Differenz der Radien zur Höhe hat.

Derselbe Ring hat die Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser Tangente an den inneren und Sehne des äußeren Kreises ist.

241.

Übungen. 1) Die Centrale zweier gleicher Kreise ist dem Radius r gleich. Man soll den gemeinschaftlichen Teil beider Kreisflächen berechnen.

2) Beschreibt man um ein rechtwinkliges Dreieck den Halbmesser, ferner die Halbkreise über jeder Kathete (auswärts), so entstehen zwei von Kreisbögen begrenzte halbmondförmige Flächen*), deren Inhalt dem Inhalte des Dreiecks gleich ist.

*) Die lunulae des Hippokrates von Chios; 400 v. Chr.

3) Errichtet man über jeder Seite des Quadrats den Halbkreis nach innen, so erhält man eine vierblättrige von Kreisbögen begrenzte Figur, deren Inhalt den vier äußeren Segmenten gleich ist, um welche das Quadrat kleiner ist als der umgeschriebene Kreis.

4) Teilt man den Durchmesser des Halbkreises in zwei innere Abschnitte und errichtet über jedem Abschnitte den Halbkreis, so ist die Differenz zwischen der Fläche des gegebenen Halbkreises und der Summe der neu konstruierten Halbkreise dem Kreise gleich, welcher die im Teilpunkte errichtete Senkrechte zum Durchmesser hat.

Anmerkung zu 4. Die von den drei Halbkreislinien begrenzte Figur hat mit dem Kreise gleichen Umfang.

Anhang III.

Beziehungen zwischen Umfang und Inhalt der Figuren.

(Isoperimetrische Sätze.)

Erklärung. Isoperimetrisch heißen zwei Figuren von gleichem Umfange.

242.

Lehrsatz. Von zwei Dreiecken, welche gleiche Grundlinie und gleichen Inhalt haben, hat dasjenigen den größeren Umfang, welches den größten Winkel an der Grundlinie hat.

Voraussetzung. Die beiden Dreiecke seien $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$, ihr Inhalt $J_1 = J_2$, $B_1 C_1 = B_2 C_2$, $\sphericalangle C_2 > C_1 > B_1$.

Behauptung. $A_1 B_1 + A_1 C_1 < A_2 B_2 + A_2 C_2$.

Beweis. Man lege die Dreiecke mit der Grundlinie so auf einander, daß der größere Basiswinkel C_1 einen Teil von C_2 bildet; ziehe die (zur Basis parallele) Verbindungslinie der Spitzen A_1 und A_2, verlängere $B_1 A_1$ um $A_1 C_1$ (bis D_1) und verbinde D_1 mit A_2, so ist nach 57a und wegen $C_1 > B_1$

$$D_1 A_2 < C_2 A_2.$$

Durch 15 und Substitution folgt die Behauptung.

243.

Lehrsatz. Von zwei isoperimetrischen Dreiecken ($\triangle_1$ und $\triangle_2$), welche gleiche Grundlinie haben, hat dasjenige ($\triangle_2$) die kleinere Fläche, welches den größten Winkel (C_2) an der Basis hat.

Beweis. Ein drittes Dreieck ($\triangle_3$) von derselben Basis soll mit $\triangle_1$ gleichen Inhalt und den Basiswinkel C_2 haben,

so ist, wenn mit Y die Umfänge bezeichnet werden, nach 242 $Y_3 > Y_1$; also auch $Y_3 > Y_2$, demnach $C_3 A_3 + B_3 A_3 > C_2 A_2 + B_2 A_2$. Da nun A_2 in der Richtung $C_3 A_3$ liegt, so würde jede andere Annahme als $C_2 A_2 < C_3 A_3$ gegen diese Ungleichung verstoßen (15). Daher $\triangle_3 > \triangle_2$ und somit $\triangle_1 > \triangle_2$.*)

244.

Lehrsätze. a) Unter allen Dreiecken, welche eine Seite und den Inhalt gleich haben, hat dasjenige den kleinsten Umfang, in welchem die beiden anderen Seiten gleich lang sind. C 391. 242.

b) Unter allen isoperimetrischen Dreiecken, welche eine Seite gleich haben, hat das über dieser Seite gleichschenklige den größten Inhalt. 39α. 243.

245.

Lehrsätze. a) Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel und die Summe der ihn einschließenden Seiten gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten einander gleich sind.

Beweis. Zwei solche Dreiecke verhalten sich wie die Produkte der einschließenden Seiten. Es muß also dasjenige Dreieck das größte sein, in welchem dieses Produkt den größten Wert erhält, während die Summe konstant bleibt.

Der Fall läßt sich allgemeiner erledigen durch Beantwortung der Frage: Für welche Werte von x und y hat xy den größten Wert, wenn $x + y = a$ ist?

Setzt man $x = \frac{a}{2} + \delta$, so wird $y = \frac{a}{2} - \delta$, und

$$xy = \left(\frac{a}{2} + \delta\right)\left(\frac{a}{2} - \delta\right) = \frac{a^2}{4} - \delta^2,$$ was offenbar am größten wird, wenn der Subtrahend Null und daher, weil zugleich $x + y = a$ sein soll, $x = y = \frac{a}{2}$ wird.

Zusatz. Unter den isoperimetrischen Kreissektoren hat derjenige die größte Fläche, dessen Bogen dem Durchmesser gleich ist.

*) Vgl. Baltzer El. d. M. II S. 138 d. 2. Aufl. Durch die hier gegebene Anordnung 242, 243 dürfte der Beweis dieser fundamentalen Sätze sich etwas vereinfacht haben.

Beweis. Der Inhalt J des Sektors vom Bogen a und Radius r ist $\frac{1}{2}$ ar (240), der Umfang $Y = a + 2r$. Soll $\frac{1}{2} Y = \frac{1}{2} a + r$ konstant bleiben und $\frac{1}{2} a \cdot r$ ein Maximum werden, so muß $\frac{1}{2} a = r$, also $a = 2r$ sein.

Aufgabe. Man soll (mit Annäherung) unter Anwendung des Gradbogens den größten Sektor konstruieren, welcher eine gegebene Strecke b zum Umfange hat, und das ihm inhaltsgleiche Quadrat herstellen.

b) Unter allen Dreiecken, welche einen Winkel und die ihm gegenüberliegende Seite gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem die beiden anderen Seiten gleich lang sind. 243. Auch durch Benützung von C. 29.

246.

Lehrsätze. a) Unter allen Dreiecken, welche zwei Seiten einzeln gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten einen rechten Winkel einschließen.

Beweis. Das behauptete Dreieck hat die größte Höhe, wie sich zeigt, wenn man mit der einen Seite um den Scheitel einen Kreis beschreibt.

b) Unter allen Dreiecken, welche die Summe zweier Seiten gleich haben, ist dasjenige das größte, in welchem diese Seiten gleich sind und einen rechten Winkel einschließen.

Der Beweis wird durch Vermittlung eines gleichschenkligen Dreiecks, welches auf gleicher Basis mit dem allgemeinen steht, auf a) zurückgeführt.

247.

Lehrsatz. Unter allen isoperimetrischen Dreiecken hat das gleichseitige den größten Inhalt.

Beweis. Bezeichnet man mit σ den (konstanten) Umfang, mit a, b, c die Seiten eines beliebigen Dreiecks, so ist der Inhalt

$$\frac{1}{4} \sqrt{\sigma (\sigma - 2a) (\sigma - 2b) (\sigma - 2c)},$$

und dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn

$$(\sigma - 2a) (\sigma - 2b) (\sigma - 2c)$$

den größten Wert erhält, weil das Übrige unveränderlich ist und die Wurzel mit dem Radikanden stetig wächst und abnimmt.

Durch Entwicklung wird der Ausdruck

$$-\sigma^3 + 4\sigma\,(ab + ac + bc) - 8abc;$$

so daß man die weitere Betrachtung auf

$$\sigma\,(ab + ac + bc) - 2abc \;\ldots\ldots (1$$

beschränken kann. Daraus wird durch die Substitution

$$c = \sigma - (a + b):$$

$$(a + b)\,\sigma^2 - (a + b)^2\,\sigma - ab\,\sigma + 2ab\,(a + b) \;\ldots\ldots (2$$

Setzt man darin b = a gemäß 244b, so erhält man

$$2a\sigma^2 - 5a^2\sigma + 4a^3; \;\ldots\ldots (3$$

Setzt man hingegen $b = a + \delta$, und subtrahiert von dem dadurch erhaltenen Ausdruck den vorigen, so bleibt als Differenz

$$\delta\,(\sigma^2 - 5a\sigma + 6a^2) - \delta^2\,(\sigma - 2a) \;\ldots\ldots (4$$

Da nun (3 ein Maximum ist, so muß diese Differenz (4) sowohl für positive als für negative δ negativ sein, da jede Abweichung des b vom Werte a eine Abnahme des Wertes von (2 zur Folge hat. Dieses ist aber nur dann allgemein der Fall, wenn die erste Potenz von δ in der Differenz nicht vorkommt, wenn also

$$\sigma^2 - 5a\sigma + 6a^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich als Bedingung für das Maximum:

$$a = \frac{\sigma}{3}.\text{*)}$$

248.

Lehrsätze. a) Unter allen Parallelogrammen, welche zwei anliegende Seiten gleich haben, hat das Rechteck den größten Inhalt. 246a.

b) Unter allen isoperimetrischen Parallelogrammen hat das Quadrat den größten Inhalt. 246b.

249.

Lehrsatz. Unter allen isoperimetrischen Vierecken hat das Quadrat den größten Inhalt.

Beweis. Das größte Viereck muß gleichseitig sein; denn wären zwei anliegende Seiten ungleich, so könnte man das von ihnen und der Diagonale gebildete Dreieck durch Gleichmachen der beiden Seiten (nach 244b) vergrößern, somit auch das Viereck. Unter den gleichseitigen isoperimetrischen Vierecken ist aber nach 248 das Quadrat das größte.

---

*) Einen rein geometr. Beweis gibt nach Steiner Baltzer a. a. O. S. 139. Die hier gegebene Ableitung erscheint als analytische Folgerung aus 244b. Zum nachträglichen Beweis scheint die einfache Folgerung zu genügen, daß ein Dreieck, in welchem noch zwei Seiten ungleich sind, unmöglich das größte sein kann.

250.

Lehrsatz. Das größte n=Eck von gegebenem Umfange ist gleichseitig.

Beweis. Ist Q das größte n=Eck vom Umfange Y, so können zwei anliegende Seiten desselben nicht ungleich sein, weil man sonst durch Abänderung des Dreiecks, welche diese beiden Seiten in Verbindung mit der Diagonale begrenzen, in ein gleichschenkliges das Polygon Q ohne Änderung seines Umfanges vergrößern könnte, gegen die Voraussetzung.

Umkehrung? Da nur ein einziges gleichseitiges Dreieck von gegebenem Umfange möglich ist, so liegt auch hierin ein Beweis für 247.

251.

Aufgabe. Es sind (n — 1) Seiten eines n=Ecks gegeben; man soll diese so zusammenstellen und die n^{te} Seite (x) so wählen, daß das Polygon die größtmögliche Fläche erhält.

Lösung. Das größte n=Eck entsteht, wenn man über die Winkel und die n^{te} Seite so verfügt, daß letztere den Durchmesser des Halbkreises bildet, in welchen das Polygon eingeschrieben ist.

Beweis.*) Zunächst kann man sich klar machen, daß die n^{te} Seite für den Fall des Maximums einen Wert zwischen Null und der Summe der (n — 1) Seiten haben muß.

Ferner folgt, daß im größten Polygon jeder Winkel, den die beiden von den Endpunkten der n^{ten} Seite an ein Eck gezogenen Diagonalen mit einander bilden, ein rechter sein muß, weil man sonst unter Beibehaltung der (n — 1) Seiten und des übrigen Inhaltes das Polygon dadurch vergrößern könnte, daß man den fraglichen Winkel zum rechten macht. (Durch Drehung des von der einen Diagonale abgeschnittenen Teiles der Figur.)

Folglich liegen die Ecken des größten Polygons in dem über x beschriebenen Halbkreisbogen.

Demgemäß kann ein Polygon, welches die (n — 1) gegebenen Seiten hat, nur dann größer sein als alle unter derselben Bedingung möglichen, wenn es in den Halbkreis eingeschrieben ist, d. h. es ist das größtmögliche der in Rede stehenden nur noch unter denjenigen Polygonen zu suchen, welche in den Halbkreis eingeschrieben sind.

Es gibt aber nur einen einzigen Halbkreis, in

*) Vgl. Legendre Ed. d. Geom. Anhang zum 4. Buche. Satz 4 und 5.

welchen ein n=Eck von gegebenen $(n-1)$ Seiten so eingeschrieben werden kann, daß die n^{te} Seite den Durchmesser bildet. Denn ist r der Radius dieses Halbkreises, r' der Radius eines zweiten von der verlangten Größe, so müßte $r' \lessgtr r$ sein. In einem solchen Kreise wäre aber die Summe der Centriwinkel, welche den gegebenen Seiten gegenüberliegen $\gtrless 2$ R.

Die in diesen Halbkreis eingeschriebenen Polygone haben alle die gleiche Größe (die Vertauschung der gegebenen Seiten ändert daran nichts).

Da somit das größte notwendig unter den eingeschriebenen ist, diese aber alle einander gleich sind, so ist jedes derselben größer als alle übrigen nicht eingeschriebenen.

252.

Lehrsatz. Von allen n=Ecken mit gegebenen Seiten ist das größte dasjenige, dessen Ecken in einer Kreislinie liegen.

Beweis. Man vergleicht ein eingeschriebenes n=Eck (P) mit einem anderen (Q) von gleichen Seiten, dessen Ecken nicht alle zugleich in einer Kreislinie liegen können. Zunächst ist klar, daß sich die Größe von P nicht ändert, wenn man die Seiten vertauscht, und man ordnet sie deshalb so, daß sie den Seiten in Q der Ordnung nach gleich sind. Um 251 anwenden zu können, zieht man in P durch ein Eck (A) den Durchmesser und verbindet dessen anderen Endpunkt (B) mit den beiden Endpunkten der etwa durchschnittenen Seite. An Q setzt man auf der gleichen Seite ein Dreieck ($\triangle$) an, welches dem eben konstruierten kongruent ist und zieht dann die dem Durchmesser AB analoge Strecke A'B'. AB und A'B' teilen die beiden $(n+1)$=Ecke in je zwei Teile P_1, P_2 und Q_1, Q_2, welche alle Seiten bis auf eine beziehungsweise gleich haben, somit ist $P_1 > Q_1$, wenn nicht etwa alle Ecken von Q_1 im Halbkreise über A'B' liegen, was möglich wäre. Ebenso $P_2 > Q_2$, wenn nicht alle Ecken von Q_2 im Halbkreise über A'B' liegen. Somit $P_1 + P_2 > Q_1 + Q_2$, wenn nicht alle Ecken von Q_1 und Q_2 zugleich im Kreise liegen, was gegen die Voraussetzung wäre. Somit ist thatsächlich $P_1 + P_2 > Q_1 + Q_2$, d. h. $P + \triangle > Q + \triangle$, und $P > Q$.

253.

Lehrsatz. Unter allen isoperimetrischen n=Ecken ist das reguläre das größte.

Beweis. Nach 250 ist das größte n=Eck gleichseitig, nach 252 muß es in den Kreis eingeschrieben werden können. Diese beiden Bedingungen erfüllt nur das reguläre.

Zusatz. Das reguläre n=Eck hat einen kleineren Umfang als das irreguläre von gleichem Inhalte.

Beweis. Man denke sich ein dem irregulären ähnliches n=Eck vom Umfange des regulären und wende den Lehrsatz und 196, 195 an.

254.

Lehrsatz. Das reguläre $(n + 1)$=Eck ist größer als das reguläre n=Eck von gleichem Umfange.

Beweis. Das reguläre n=Eck kann als irreguläres $(n + 1)$=Eck mit einem gestreckten Winkel angesehen werden; das irreguläre $(n + 1)$=Eck ist aber kleiner als das isoperimetrische reguläre (253).

Somit bilden die Flächen der isoperimetrischen regulären Polygone vom Dreiecke an bis zum n=Ecke hinauf eine steigende Reihe.

Zusatz. Das reguläre $(n + 1)$=Eck hat einen kleineren Umfang als das reguläre n=Eck von gleichem Inhalte.

Beweis. Sei J der Inhalt, Σ_{n+1} der eine, Σ_n der andere Umfang, so ist die Behauptung: $\Sigma_{n+1} < \Sigma_n$. Denkt man sich ein reguläres n=Eck F vom Umfange Σ_{n+1}, so ist $F < J$ (Lehrs.), da nun $F : J = (\Sigma_{n+1})^2 : (\Sigma_n)^2$, so ist $\Sigma_{n+1} < \Sigma_n$.

Somit bilden die Perimeter gleichflächiger regulärer Polygone vom Dreiecke an bis zum n=Ecke eine fallende Reihe.

255.

Lehrsatz. Der Kreis ist größer als jedes n=Eck von gleichem Umfange.

Beweis. Es habe ein reguläres Polygon (n=Eck) den Umfang $2r\pi$ eines Kreises vom Radius r.

Schreibt man diesem Polygon einen Kreis ein, so hat dieser einen Radius $\varrho < r$, weil (nach 234) $2\varrho\pi < 2r\pi$. Setzt man demnach $\varrho = r - d$, so ist der Inhalt des Polygons nach 232 und unserer Voraussetzung

$$Q = \frac{1}{2}(r - d)\,2r\pi$$

$$Q = r^2\pi - dr\pi$$

somit kleiner als der Inhalt $r^2\pi$ des Kreises von gleichem Umfange. Umsomehr ist der Inhalt des isoperimetrischen irregulären n=Eckes kleiner als der des Kreises.

Zusatz. Der Kreis hat einen kleineren Umfang als ein n-Eck von gleichem Inhalte.

Beweis wie in 254 Z.

256.

Lehrsatz.*) Unter allen isoperimetrischen Figuren hat der Kreis die größte Fläche.

Beweis. Zunächst kann man sich klar machen, daß eine Figur von gegebenem Umfange nicht beliebig groß sein kann. Da ihr Inhalt Null wird, wenn man die Transversale, welche den Umfang halbiert, bis zur halben Länge des Perimeters vergrößert, und andererseits der Inhalt ohne Änderung des Umfanges vergrößert werden könnte, wenn die Transversale Null wäre, so muß sie ihren größten Inhalt für einen zwischen 0 und der Hälfte des Perimeters liegenden Wert der Transversale haben.

Die größte Figur kann nirgends konvex nach innen sein, weil man eine solche Figur durch Ausbiegung des konvexen Teiles ohne Änderung des Umfanges vergrößern könnte.

Ferner muß in der größten Figur die Transversale, welche den Umfang halbiert, auch die Fläche halbieren, weil man sonst (durch Umschlagen des größeren Teiles um die Transversale) eine größere Figur von gleichem Umfange herstellen könnte.

In der Hälfte der größten Figur muß ferner jeder Punkt des Umfanges so liegen, daß die nach ihm von den Endpunkten der Transversale aus gezogenen Strecken einen rechten Winkel mit einander bilden, sonst könnte man diese Hälfte unter Beibehaltung ihres Anteils am Umfange vergrößern, indem man den rechten Winkel herstellt. Vergl. 251.

Diesen Bedingungen genügt nur der Kreis. (108 Zus. 4), und da es nur einen Kreis von gegebenem Umfange gibt, so ist dieser die größte Figur.

Zusatz. Unter allen inhaltsgleichen Figuren hat der Kreis den kleinsten Umfang.

Beweis. Ist der Kreis K der Figur L gleich, und der Kreis K' mit L von gleichem Umfang P', so ist $K' > L$ (Lehrsatz); also $K' > K$, und da der größere Kreis den größeren Umfang hat, so ist $P' > P$, also der Umfang von L größer als der des Kreises K.

---

*) Im Wesentlichen nach dem von Baltzer a. a. O. S. 140 Mitgeteilten.

Anhang IV.

Allgemeine Lösung des Apollonischen Berührungsproblems. (N. G.)

Man pflegt das System der zehn Aufgaben:

Einen Kreis zu konstruieren, welcher

1) durch 3 gegebene Punkte geht,
2) durch 2 gegebene Punkte geht und eine geg. Gerade berührt,
3) durch 1 gegebenen Punkt geht und zwei geg. Gerade berührt,
4) drei gegebene Gerade berührt,
5) durch 2 gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt,
6) durch 1 gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,
7) zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt,
8) durch einen gegebenen Punkt geht und 2 gegebene Kreise berührt,
9) eine gegebene Grade und zwei gegebene Kreise berührt,
10) drei gegebene Kreise berührt,

das Apollonische*) Problem zu nennen. Von diesen bedürfen die ersten 4 einer besonderen Behandlung nicht, weil 1 und 4 schon durch §§ 54—56 gelöst sind, ferner bezüglich 2 leicht erkannt wird, daß die Potenz des Punktes, in welchem sich die Verbindungslinie der Punkte und die Gerade schneiden, gegeben ist; und weil 3 durch die Erwägung, daß sofort noch ein zweiter Punkt des gesuchten Kreises angegeben werden kann, auf 2 zurückgeführt wird.

Die übrigen 6 Aufgaben sind mit der zehnten zugleich gelöst, wenn die Hilfsmittel dieser Lösung so allgemeiner Natur sind, daß sie auch auf diejenigen Fälle, wo einer oder zwei der gegebenen Kreise sich auf Punkte reduzieren, oder sich von einem festen Peripheriepunkte aus unendlich erweitern, angewendet werden können.

Eine solche allgemeine Lösung des Problems soll hier gegeben werden.

Es soll ein Kreis konstruiert werden, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Vorbereitung der Aufgabe. Variiert man die beiden Elemente, Berührung von außen und Berührung von innen, mit Wiederholung zur 3. Ordnung, so erhält man 8 im allgemeinen mögliche Kreise, deren jeder die gestellte Aufgabe löst. Wir bezeichnen die gegebenen 3 Kreise mit den Ordnungszahlen 1, 2, 3,

*) Apollonius aus Perga in Pamphilien, geb. 247 v. Chr., gehörte der Alexandrinischen Schule an.

einen der gesuchten 8 Kreise, z. B. denjenigen, der den Kreis 1 von außen, den Kreis 2 von innen, den Kreis 3 von außen berührt, durch aia und analog die übrigen.

Es lassen sich die gesuchten 8 Berührungskreise in 4 Paare so ordnen, daß die zwei Kreise eines Paares von je einem der drei gegebenen Kreise auf ungleiche Art (der eine von außen, der andere von innen) berührt werden.

Diese 4 Paare von Berührungskreisen sind:

aaa	aii	iai	iia
iii	iaa	aia	aai

Dadurch reduziert man die allgemeine Aufgabe auf diese:

Zwei Kreise zu finden, welche drei gegebene Kreise und zwar jeden einzelnen derselben auf ungleiche Art berühren.

Analyse. Dieselbe führt auf eine Reihe von allgemeinen Lehrsätzen, welche aus den im 3. Abschnitt aufgeführten Begriffen und Sätzen folgen.

1) Berührt ein Kreis (1) zwei andere (XY), so liegen die Berührungspunkte mit dem auf Kreis (1) bezogenen Pole der Chordale von (XY) in gerader Linie.

Beweis. Die zwei gleichen Tangenten schneiden sich auf der Chordale; somit ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte Polare zu einem Punkte der Chordale und geht folglich durch den Pol derselben.

Anmerkung. Kennt man die Chordale der beiden gesuchten Kreise (XY), so läßt sich auch ihr Pol bezüglich des Kreises (1) konstruieren, wodurch ein Punkt gefunden ist der Geraden, welche durch die beiden gesuchten Berührungspunkte geht.

2) Berührt ein Kreis (1) zwei andere Kreise (XY) und zwar z. B. a) beide unter sich gleichartig (beide von innen oder beide von außen), b) beide unter sich ungleichartig (den einen von innen, den andern von außen), so liegen die Berührungspunkte a) mit dem äußeren, b) mit dem inneren Ähnlichkeitspunkte der Kreise (XY) in gerader Linie.

Beweis. Verbindet man die Berührungspunkte und die beiden anderen Schnittpunkte der den drei Kreisen gemeinschaftlichen Sekante mit den Mittelpunkten, so sind die Radien paarweise parallel.

Anmerkung. Kennt man den inneren Ähnlichkeitspunkt der gesuchten zwei Kreise (XY), so hat man einen zweiten Punkt, der mit den gesuchten zwei Berührungspunkten des Kreises 1 in gerader Linie liegt. Somit sind die gesuchten Berührungskreise durch ihre Chordale und ihren inneren Ähnlichkeitspunkt vollkommen bestimmt und können konstruiert werden.

3) Berührt jeder von zwei Kreisen (1, 2) zwei andere Kreise (XY), und zwar a) beide auf unter sich gleiche Art, b) beide auf unter sich ungleiche Art, so liegt a) der äußere, b) der innere Ähnlichkeitspunkt von (XY) auf der Chordale von (1, 2).

Beweis. Sind B_{1x}, B_{1y}, ferner B_{2x}, B_{2y}, die Berührungspunkte, so geht nach 2) die Gerade (B_{1x}, B_{1y}), durch einen Ähnlichkeitspunkt (A) von (XY) und die Gerade B_{2x}, B_{2y} durch denselben Ähnlichkeitspunkt (A). Somit ist

$$AB_{1x} \,.\, AB_{1y} = AB_{2x} \,.\, AB_{2y},$$

woraus der Satz folgt.

Zusatz. Berührt jeder von 3 Kreisen (1, 2, 3) zwei andere Kreise (XY) auf ungleiche Art, so liegt der innere Ähnlichkeitspunkt von (XY) zugleich auf den drei Chordalen der gegebenen Kreise und ist somit identisch mit ihrem Chordalpunkte.

Daraus folgt, daß jede Gerade, welche durch die zwei Berührungspunkte eines der drei gegebenen Kreise mit einem der 4 Paare geht, vom Chordalpunkte der drei gegebenen Kreise ausläuft.

4) Lehrsätze. a) Die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte zu drei Kreisen liegen in einer Geraden.

b) Je ein äußerer Ähnlichkeitspunkt liegt mit den inneren Ähnlichkeitspunkten der beiden anderen Kreispaare in gerader Linie.

Denkt man sich nämlich zwei Kreise, welche auf (unter sich) ungleiche Art, von jedem der drei Kreise (1, 2, 3) berührt werden, so sind die 4 durch die oben ausgeschiedenen 4 Kreispaare gegebenen Fälle möglich, und es liegen

1) die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte von 1, 2, 3 nach 3) auf der Chordale von $\overset{aaa}{\underset{iii}{\ldots}}$, weil jeder dieser beiden Kreise die Kreispaare (1, 2), (1, 3), (2, 3) auf gleiche Art berührt.

2) Der äußere Ähnlichkeitspunkt von (1, 2) liegt mit den inneren Ähnlichkeitspunkten von (1, 3), (2, 3), auf der Chordale der Kreise $\overset{aai}{\underset{iia}{..}}$, weil jeder dieser Kreise die Kreise (1, 2) auf (unter sich) gleiche Art, die Kreise (1, 3) aber und auch die Kreise (2, 3) auf unter sich verschiedene Art berührt.

3) Der äußere Ähnlichkeitspunkt von (1, 3) liegt mit den inneren Ähnlichkeitspunkten von (1, 2), (2, 3) auf der Chordale der Kreise $\overset{aia}{\underset{iai}{.\,..}}$.

4) Der äußere Ähnlichkeitspunkt von (2, 3) liegt mit den inneren Ähnlichkeitspunkten von (1, 2), (1, 3) auf der Chordale der Kreise $\overset{aii}{\underset{iaa}{.\,.}}$.

Eine Gerade, auf welcher 3 Ähnlichkeitspunkte zu drei Kreisen liegen, heißt eine Ähnlichkeitsachse der Kreise. Die 4 Ähnlichkeitsachsen der gegebenen drei Kreise sind somit die 4 Chordalen der gesuchten 4 Paare von Berührungskreisen.

Konstruktion. Man suche den Chordalpunkt der gegebenen 3 Kreise und ihre 4 Ähnlichkeitsachsen. Man konstruiere zu jeder Ähnlichkeitsachse (als Polare) den ihr in jedem der gegebenen Kreise entsprechenden Pol. Nach diesen 12 Polen ziehe man vom Chordalpunkte aus Gerade. Die (24) Schnittpunkte dieser Geraden mit den Peripherien sind die (24) Berührungspunkte der gesuchten (8) Kreise. Die Richtungen der 24 Radien, welche von den Mittelpunkten der gegebenen Kreise aus an die Berührungspunkte gezogen werden, schneiden sich in 8 Punkten, den Mittelpunkten der gesuchten Kreise. Diese lassen sich auch mit Hilfe der 4 Centralen finden, welche konstruiert werden, indem man vom Chordalpunkte Senkrechte auf die Ähnlichkeitsachsen zieht.

Anmerkung. Die Konstruktion der Aufgaben 5—9 bietet nun keinerlei Schwierigkeit, wenn man das in §§ 200—205 über die Grenzlagen der Ähnlichkeitspunkte und Chordalen Gesagte berücksichtigt. Die Ausführung dieser Konstruktionen darf als eine der vorzüglichsten Übungen im Linearzeichen gelten, weil für alle Richtungen kontrolierende dritte Punkte vorhanden sind.

Verzeichnis der citierten Sätze.

Citierte Konstruktionen.

Recknagel, Georg, Thermometrische Versuche. Mit 1 lithograph. Tafel. [IV u.] 44 S. gr. 8°. 1863. M. —.60.

Brunn, Hermann, Ueber Curven ohne Wendepunkte. Mit 6 Tafeln. 74 S. gr. 8°. 1889. M. 2.80.

— Ueber Ovale und Eiflächen. 42 S. gr. 8°. 1887. M. 1.50.

Doehlemann, Karl, Untersuchung der Flächen, welche sich durch eindeutig aufeinander bezogene Strahlenbündel erzeugen lassen. 40 S. gr. 8°. 1889. ℳ 1.

Franke, Dr. J. H., Technische Anleitung zu den trigonometrischen Netz- und Koordinaten-Rechnungen in der Kataster- und Forst-Vermessung. Ein Handbuch für Trigonometer und Vermessungsingenieure bearbeitet auf Grund der Hauptvorschriften der k. bayerischen Vermessungs-Instruktion mit vergleichender Erörterung weiterer technischer Anweisungen. Mit 4 Tafeln. VIII, LXIV u. 170 S. Lex. 8°. 1889. ℳ 7.

Günther, Siegmund, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie für den Unterricht bearbeitet. Dritte durchaus umgearbeitete und revidierte Auflage. Mit 47 Abbildungen im Text und 2 Karten. IX. und 133 S. gr. 8° 1893. M. 2.

Pözl, Wenzeslaus, Elemente der darstellenden Geometrie zum Schulgebrauche zusammengestellt. VII. u. 107 S. Lex. 8°. 1890. M 3.

Schüler, Wilhelm Friedrich, Neue Theorie des Imaginären in der Funktionenrechnung und der analytischen Geometrie. 56 S. gr. 4°. 1878. M. 4.

— Lehrbuch der analytischen Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte, dann der Strahlbüschel und Punktreihen (projektivische Geometrie). Mit Uebungsaufgaben. Mit 4 Tafeln in Steindruck. XI u. 247 S. gr. 8°. 1879. M. 4.80.

Sickenberger, A., Leitfaden der Arithmetik nebst Übungsbeispielen. Sechste Auflage. Mit 6 Holzschnitten. VII u. 196 S. gr. 8°. 1895. M. 1.60.

Die erste Auflage erschien 1875, die zweite 1878, die dritte 1885, die vierte 1888, die fünfte 1892.

— Die Determinanten in genetischer Behandlung, zur Einführung für Anfänger. Zweiter Abdruck. VII u. 80 S. gr. 8°. 1887. M. 1.60.

— Leitfaden der elementaren Mathematik.

Erster Teil: Algebra. Dritte Auflage. V u. 75 S. gr. 8°. 1894. M. 1.20.

Die erste Auflage erschien 1888, die zweite 1892.

Sickenberger, A., Leitfaden der elementaren Mathematik.
Zweiter Teil: Planimetrie. Mit 92 Figuren im Text. Dritte Auflage. VI u. 123 S. gr. 8°. 1896. M. 1.50.
Die erste Auflage erschien 1888, die zweite 1893.
Dritter Teil: Stereometrie. — Trigonometrie. Mit 54 Figuren im Text. Zweite Auflage. [IV u.] 103 S. gr. 8°. 1894. M. 1.20.
Die erste Auflage erschien 1888.

— Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt. Zweite vermehrte Auflage. 20 S. 8°. 1891. M. —.40.
Die erste Auflage erschien 1888.

— Uebungsbuch zur Algebra.
Erste Abteilung: Erste und zweite Stufe der Rechnungsarten einschliesslich der lineären Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Zweite Auflage. [VI u.] 106 S. gr. 8°. 1895. M. 1.20.
Die erste Auflage erschien 1890.
Zweite Abteilung: Dritte Stufe der Rechnungsarten, quadratische Gleichungen, Reihen, Kombinatorik. [IV u.] 136 S. gr. 8°. 1890. M. 1.80.

Wenz, G., Zusammenstellung der wichtigsten arithmetischen und algebraischen Sätze in Formel, Wort und Beispiel. Ein Handbüchlein für den Rechen-Unterricht.
Erste Abteilung: Die Rechnungsarten für die Volks- und Mittelschulen [IV u.] 32 S. 8°. 1873. M. —.30.
Zweite Abteilung: Die Rechnungsarten für die höheren Lehranstalten. [IV u.] 58 S. 8°. 1873. M. —.45.

Winter, Wilhelm, Algebra. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. IV und 318 S. gr. 8°. 1895. M. 3.20.
Die erste Auflage erschien 1891.

— Grundriß der Mechanik und Physik für Gymnasien. Mit 232 eingedruckten Abbildungen. Zweite Auflage. VI u. 349 S. gr. 8°. 1896. M. 3.20.

— Lehrbuch der Physik zum Schulgebrauche. Mit 354 eingedruckten Abbildungen. Dritte Auflage. XII u. 491 S. gr. 8°. 1893. M. 4.80.
Die erste Auflage erschien 1886, die zweite 1890.

— Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. V u. 115 S. gr. 8° 1895. M. 1.60
Die erste Auflage erschien 1890.

— Trigonometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. V. u. 78 S. gr. 8°. 1895. M. 1.
Die erste Auflage erschien 1890.

— Der Vogelflug. Erklärung der wichtigsten Flugarten der Vögel mit Einschluss des Segelns und Kreisens. Mit eingedruckten Abbildungen. VIII u. 172 S. gr. 8°. 1895. M. 3.60.

Bögl